Modelltheorie I – Blatt 3

Abgabe am 3.11.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte):

Sei K ein Körper, sei $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$ die Sprache der K-Vektorräume, und sei T die $L_{K\text{-VR}}$-Theorie der K-Vektorräume, die als Menge unendlich sind. (Zur Erinnerung: Diese Theorie ist vollständig und hat Quantoren-Elimination.)

(a) Wie viele abzählbare Modelle besitzt T bis auf Isomorphie? Unter welchen Bedingungen an K ist T $\aleph_0$-kategorisch?

(b) Sei $\mathcal{M} \models T$ ein Modell und $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: Die Menge $S_1(A)$ der 1-Typen über A besteht aus:
- einem Typ p_b für jedes Element $b \in \langle A \rangle_K \dots$
- $\dots$ und genau einem weiteren Typ p_∞.

(c) Welche der Typen aus (b) sind isoliert und welche nicht? (Dies hängt evtl. von K ab.)

(d) Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Teilmengen von $S_1(A)$.
Hinweis: Die Antwort ist so was wie: Für jede endliche Teilmenge von $\langle A \rangle_K$ gibt es genau xxx abgeschlossene Teilmengen, nämlich yyy. (Wobei xxx und yyy möglicherweise von K abhängen.)

(e) Wir nehmen nun an, dass K so ist, dass T $\aleph_0$-kategorisch ist. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine obere Abschätzung für die Anzahl $|S_n(T)|$ der n-Typen an.[1]

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei T $\aleph_0$-kategorisch (in einer abzählbaren Sprache L). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f(n)$ die Anzahl der L-Formeln in n Variablen bis auf Äquivalenz modulo T. Wie hängt $f(n)$ mit der Anzahl $|S_n(T)|$ der n-Typen zusammen?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Laut dem Satz von Ryll-Nardzewski ist eine Theorie in einer abzählbaren Sprache $\aleph_0$-kategorisch, wenn für *alle* $n \in \mathbb{N}$ der Typenraum $S_n(T)$ endlich ist. Zeigen Sie, dass dieses „alle“ wirklich nötig ist, d. h. geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Beispiel einer Theorie an, die nicht $\aleph_0$-kategorisch ist, in der es aber nur endlich viele n-Typen gibt.

Hinweis: Fangen Sie damit an, dies im Fall $n = 1$ zu machen. Man kann z. B. versuchen, dafür zu sorgen, dass jedes einzelne Element eines Modells den selben Typ hat, aber dass Paare von Elementen verschiedene Typen haben können.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W20/

[1] Wenn Sie wollen, können Sie die Anzahl auch genau bestimmen. Ich will's gerade nicht…

1.a) Let V be a K-vector space. V has a basis. B $|B| = \dim V$

$|V| = \dim V$, $|K|$ finite dimensional

Case 1. $|K| = \aleph_0$, Let V_1, V_2 are two vector space. with basis B_1, B_2

such that $|B_1| \neq |B_2|$

then $|V_1| = |V_2|$ but clearly $V_1 \neq V_2$.

Hence T_{K-VR} is not $\aleph_0$-categorical.

If $|V| = k \geq \aleph_1$ then $\dim V = |V|$

By linear algebra. $\dim V_1 = \dim V_2 \iff V_1 \cong V_2$

Hence Theory of K-vector space is k-categorical for $k \geq \aleph_1$

with the same argument, one can show, for $k > |K| \geq \aleph_0$.

Th_{K-VR} is k-categorical.

If K is finite, then theory of vectorspaces is k-categorical for all cardinal. k.

1.b) $M \models T$, $A \subseteq M$, $b \in \langle A \rangle_K$

T has QE, Any formula is boolean combination of $\underbrace{\lambda_0 x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i}_{\in \langle A \rangle_K} = 0$

If P contains positive formula at the form of $x - b = 0$ s.t $b \in \langle A \rangle_K$

then $x = b$, Hence $P = tP(b/\langle A \rangle_K)$

otherwise if P_∞ contains $x - b_0 \neq 0$ for all $b_0 \in \langle A \rangle_K$.

1.c) types of the form $[x = b] = \{P_b\}$ are isolated for all $b \in \langle A \rangle_K$.

1.d) closed subsets correspond to finite and finite complement subset of $\langle A \rangle$.

1.e) Let $q = p^m$, for p is a prime number.

$$\underset{a}{\varphi}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0 \quad a_i \in k \quad 1 \le i \le m$$

$P \in |S_n(T)|$

$L = L_{group} \cup \{r \mid r \in k\}$

$$\begin{cases} P \text{ contans one plane} \longrightarrow q^n \\ P \text{ -- '' -- two -- '' --} \longrightarrow q^n \times q^n \\ \quad\quad\quad \text{intersection of} \\ \vdots \\ P \text{ -- '' -- } n \text{ -- '' --} \quad q^n \times \dots \times q^n \\ \text{otherwise} \quad +1 \end{cases}$$

2. $|L| = 2^{\aleph_0}$, T is $2^{\aleph_0}$- categorical.

$f(n) =$ the number of L- formulas in n variable up to equivalence mod T.

$|S_n(T)| < \infty$ for all $n \in \mathbb{N}$

Assume $S_n(T)$ contains non-isolated type, then by o-miting type theorem there exist countable model M omitting p. on the other hand by there exist Countable model M realized p.

these two model can not isomorph to each other. which is Contradict with $2^{\aleph_0}$- categoricity.

Hence all types of $S_n(T)$ are isolated.

If φ isolated type p, it's clear that if $T \vdash \forall x \ \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$ then ψ isolates p as well.

$\Rightarrow \quad f_n(T) = |S_n(T)|$

(3) Let T be theory of k-vector space $\quad |k| = 2^{\aleph_0}$

T is not $2^{\aleph_0}$- categorical

by (1) $|S_1(T)| < \infty$

but $|S_2(T)| = +\infty$

The number of line path the origin, make infinitly many types distinct.

Example 2: $L = \{s\}$, consider $(\mathbb{Z}, s)$, $T = Th(\mathbb{Z}, s)$

clearly $|S_1(T)| < \infty$

but

$|S_2(T)| = \infty \quad \left(\varphi_n(x,y) : \quad s^n(x) = y \right)$

make distinct types.

Let $L = \{ \underbrace{P_1, P_2, P_3}_{\text{1-predicate}}, S, R(x,y,z) \}$

S → Successar

$M = (\mathbb{Z}, S) \dot{\cup} (\mathbb{Z}, S) \dot{\cup} (\mathbb{Z}, S)$ (tree copy of $(\mathbb{Z}, S)$

P_1, P_2, P_3

$R(x,y,z) \iff x+y+z=0$

x from first copy

y from second copy

z from third copy

$|S_1(T)| < \infty$

$|S_2(T)| < \infty$

but

$S_3(T) = \infty$

since

$P((0,0,n))$ for each n, differ from each other.