Modelltheorie I – Blatt 4

Abgabe am 17.11.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei L eine Sprache, die $<$ enthält, und sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, bei der $<$ eine Totalordnung definiert. Zeigen Sie: Für beliebige $A \subseteq M$ gilt: $\operatorname{acl}(A) = \operatorname{dcl}(A)$.

Aufgabe 2 (2+1 Punkte):

Sei $T = \text{DOAG}$ die Theorie der nicht-trivialen divisiblen angeordneten abelschen Gruppen, in der Sprache $L_{\text{oag}} = \{0, +, -, <\}$. (Wir hatten vor einem Jahr gesehen, dass T Quantoren-Elimination hat und vollständig ist.)

(a) Zeigen Sie: Jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ lässt sich auf natürliche Weise als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffassen, und $A \subseteq M$ gilt: $\operatorname{acl}(A) = \operatorname{dcl}(A) = \langle A \rangle_{\mathbb{Q}}$.

(b) Folgern Sie, dass acl in T die Austauscheigenschaft hat.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Sei $L = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir machen $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu einer L-Struktur $\mathcal{M}$, indem wir definieren: $f^{\mathcal{M}}((m, n)) := (m, 0)$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{dcl}(\{a\})$ für $a = (m, n) \in M$.

(b) Zeigen Sie, dass acl in $\mathcal{M}$ nicht die Austauscheigenschaft besitzt.

Hinweis: Wenn Sie zeigen wollen, dass gewisse Mengen nicht definierbar sind, ist es nützlich, Automorphismen von $\mathcal{M}$ zu betrachten.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte):

In der Vorlesung haben wir definiert, dass acl in einer vollständige Theorie T die Austauscheigenschaft hat, wenn in jedem Modell $\mathcal{M} \models T$ gilt:

(*) Für alle $A \subseteq M$ und alle $b, c \in M$ gilt: Ist $c \in \operatorname{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \operatorname{acl}(A)$, so ist $b \in \operatorname{acl}(A \cup \{c\})$.

In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, ob man das wirklich für alle Modelle von T prüfen muss.

(a) Sei $\mathcal{M} \models T$ ein Modell, in dem (*) für *endliche* Mengen A gilt. Zeigen Sie, dass dann (*) in $\mathcal{M}$ auch für beliebige Mengen A gilt.

(b) Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{M}$ ein $\aleph_0$-saturiertes Modell von T ist, in dem (*) gilt. Zeigen Sie, dass (*) dann in allen Modellen von T gilt.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass in (b) die Bedingung „$\aleph_0$-saturiert“ wirklich nötig ist. Geben Sie also ein Beispiel von zwei elementar äquivalenten Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ an, so dass (*) in $\mathcal{M}$ aber nicht in $\mathcal{M}'$ gilt.
Hinweis: Was können Sie über (*) in $\mathcal{M}$ sagen, wenn wir $\mathcal{M}$ als $L(M)$-Struktur betrachten?

Auf 1. $acl(A) = dcl(A)$

clearly $dcl(A) \subseteq acl(A)$

$b \in acl(A)$ $\quad M \models \varphi(b, \underline{a})$ $\quad \varphi(M, \underline{a}) = \{b_0, \ldots, b_m\}$

$|\varphi(M, \underline{a})| < \infty$

such that $b_0 < b_1 < \cdots < b_m$ and Let $a = a_i$ for unique $i \leq m$

then a is unique solution of formula.

$$\varphi(x) \wedge \underbrace{\exists !^{i}}_{\text{there is exactly } i \text{ solution less than } a} y \; (\varphi(y) \wedge y < x)$$

Auf 2:

Aufgabe 2 (2+1 Punkte):

Sei $T = \mathrm{DOAG}$ die Theorie der nicht-trivialen divisiblen angeordneten abelschen Gruppen, in der Sprache $L_{\mathrm{oag}} = \{0, +, -, <\}$. (Wir hatten vor einem Jahr gesehen, dass T Quantoren-Elimination hat und vollständig ist.)

(a) Zeigen Sie: Jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ lässt sich auf natürliche Weise als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffassen, und $A \subseteq M$ gilt: $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{dcl}(A) = \langle A \rangle_{\mathbb{Q}}$.

(b) Folgern Sie, dass acl in T die Austauscheigenschaft hat.

$M \models T$, It's enough to define scaler product:

$$\mathbb{Q} \times M \longrightarrow M$$

$$\left(\tfrac{a}{b}, m\right) \longmapsto \overbrace{\left(\tfrac{m}{b}\right) + \left(\tfrac{m}{b}\right) + \cdots + \left(\tfrac{m}{b}\right)}^{a\text{-times}}$$

$\frac{m}{b} \in M$ by divisibility.

As M has total order then $acl(A) = dcl(A)$

$dcl(A) = \langle A \rangle_{\mathbb{Q}}$ $\quad$ clearly $\langle A \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq dcl(A)$

$b \in dcl(A)$ there exist $\varphi(x, \underline{a})$ s.t $M \models \varphi(b, \underline{a})$

$\circledast$ $|\varphi(M, \underline{a})| < \infty$

By QE and $\circledast$, $\varphi(x, \underline{a}) \doteq t_0 x + \sum_{i=1}^{n} t_i a_i = 0 \Rightarrow b \in \langle A \rangle_{\mathbb{Q}}$

s.t $t_i \in \mathbb{Q}$

$0 \leq i \leq n$

b) T has Exchange Property: let $M \models T$, $A \subseteq M$, $|A| < \infty$,

If $a \in \langle A \cup \{b\} \rangle_{\mathbb{Q}} \setminus \langle A \rangle_{\mathbb{Q}} \Rightarrow b \in acl(A \cup \{a\})$

$$a = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i + q_0 \cdot b \Rightarrow b = \frac{1}{q}\left(a - \sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right)$$

$q_0 \neq 0$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Sei $L = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir machen $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu einer L-Struktur $\mathcal{M}$, indem wir definieren: $f^{\mathcal{M}}((m,n)) := (m,0)$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{dcl}(\{a\})$ für $a = (m,n) \in M$.

(b) Zeigen Sie, dass acl in $\mathcal{M}$ nicht die Austauscheigenschaft besitzt.

Hinweis: Wenn Sie zeigen wollen, dass gewisse Mengen nicht definierbar sind, ist es nützlich, Automorphismen von $\mathcal{M}$ zu betrachten.

I) Let $a = (0,0)$ $b = (0,1)$

Then a is the only solution for $v = f(b)$, so $a \in acl(b)$

in addition $a \notin acl(\emptyset)$, since any element $(x, 0)$ with

$x \in \mathbb{N}$ is image of a in some automorphis of $\mathbb{N}^2$.

$b \notin acl(a)$, since any element $(0,y)$ $y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ is the image $b = (0,1)$ under some automorphism

fixing $a = (0,0)$.

$$\begin{array}{c} (m,n) \\ \uparrow \\ x = f(a) = (m,0) \\ \uparrow f \end{array}$$

$m \neq 0$

$$dcl(\{(m,n)\}) = \{(m,n), (m,0)\}$$

Reminder: Let M be saturated and $A \subseteq M$, $|A| < |M|$

1) b is algebraic $/A$

2) b has only finitly many image under automorphism of M fixing A pointwise

3). $tp^{M}(b/A)$ has only finitly many realization.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte):

In der Vorlesung haben wir definiert, dass acl in einer vollständige Theorie T die Austauscheigenschaft hat, wenn in jedem Modell $\mathcal{M} \models T$ gilt:

(*) Für alle $A \subseteq M$ und alle $b, c \in M$ gilt: Ist $c \in \operatorname{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \operatorname{acl}(A)$, so ist $b \in \operatorname{acl}(A \cup \{c\})$.

In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, ob man das wirklich für alle Modelle von T prüfen muss.

(a) Sei $\mathcal{M} \models T$ ein Modell, in dem (*) für *endliche* Mengen A gilt. Zeigen Sie, dass dann (*) in $\mathcal{M}$ auch für beliebige Mengen A gilt.

(b) Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{M}$ ein $\aleph_0$-saturiertes Modell von T ist, in dem (*) gilt. Zeigen Sie, dass (*) dann in allen Modellen von T gilt.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass in (b) die Bedingung „$\aleph_0$-saturiert" wirklich nötig ist. Geben Sie also ein Beispiel von zwei elementar äquivalenten Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ an, so dass (*) in $\mathcal{M}$ aber nicht in $\mathcal{M}'$ gilt.
Hinweis: Was können Sie über (*) in $\mathcal{M}$ sagen, wenn wir $\mathcal{M}$ als $L(M)$-Struktur betrachten?

a) $c \in acl(A \cup \{b\}) \setminus acl(A)$ only finitly many elements of A and $\{b\}$

$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $A_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$

is used in formula $\varphi(x, \underline{a}, b)$. Hence $c \in acl(A_0, b) \setminus acl(A_0) \Rightarrow b \in acl(A_0 \cup \{c\})$

$|\varphi(M)| < \infty$

by assumption

b) Let $N \models T$, (*) doesn't hold for N, there is finite set $A_0 \subseteq N$ s.t (*) doesn't hold for A_0, there is $b \in acl(A_0 \cup \{c\}) \setminus acl(A_0) \wedge c \notin acl(A_0 \cup \{b\})$

we denote A_0 by $\underline{a}$, all of these conditions by set of formula in $\underline{a}, b, c$

So $p = tp(\underline{a}, b, c)$ determine whether a, b, c is a counter example.

p in any $\aleph_0$-saturated model of T is realized, so we have a counter example there.

$\lightning$

c) Consider example of Excercise 3, when we add all points of M to the language (*) automatically holds. ($L_M = \{F\} \cup \{m \mid m \in M\}$)

but in elementry extension of M' (in same language L_M) (*) does not hold for M'

of M