Modelltheorie I – Blatt 7

Abgabe am 8.12.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+1+2 Punkte):

Sei T die Theorie von $\mathbb{Z}$ in der Sprache $L = \{<, s\}$, wobei s die Nachfolgerfunktion ist. Sie dürfen in dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden:

- T hat Quantorenelimination.
- Die Modelle von T sind genau die Strukturen der Form $M = Q \times \mathbb{Z}$, wobei Q eine angeordnete Menge ist, die Anordnung auf M die lexikographische Ordnung ist (d. h. $(q, n) < (q', n') \iff q < q' \vee (q = q' \wedge n < n')$) und $s(q, n) = (q, n + 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass acl in T die Austauscheigenschaft besitzt.
Hinweis: Für $A \subseteq M$ lässt sich $\operatorname{acl}(A)$ leicht explizit angeben.

(b) Bestimmen Sie die Dimension eines Modells $M = Q \times \mathbb{Z}$ in Abhängigkeit von Q.

(c) Bestimmen Sie den Rang von $X_{a,b} := \{(x, y) \in M^2 \mid a < x < y < b\}$ in Abhängigkeit von $a, b \in M$. Kann man immer in M selbst einen Zeugen für den Rang von $X_{a,b}$ finden?

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Wir nehmen an, dass acl in $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ die Austauscheigenschaft hat. Zeigen Sie: Eine definierbare Menge $X \subseteq M^n$ hat Rang $\geq d$ genau dann, wenn eine Koordinatenprojektion $\pi\colon M^n \to M^d$ existiert, so dass $\pi(X)$ Rang d hat.

Anmerkung: Das geht wahlweise mit Satz 2.3.5 oder direkt mit der Definition des Rangs.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

(a) Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur. Wir nehmen an, dass eine definierbare Menge $X \subseteq M^n$ existiert und eine injektive definierbare Abbildung $f\colon X^2 \to X$.
Zeigen Sie, dass acl in $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ nicht die Austauscheigenschaft hat.

(b) Sei nun $\mathcal{M} = \mathbb{F}_p(t)$, d. h. der Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten im endlichen Körper $\mathbb{F}_p$. Wir fassen $\mathcal{M}$ als L_{ring}-Struktur auf. Geben Sie eine injektive definierbare Abbildung $M^2 \to M$ an (und folgern Sie, dass acl in $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ nicht die Austauscheigenschaft hat).
Hinweis 1: Es kann nützlich sei zu zeigen, dass für jedes $a \in M$ die p-te Potenz a^p im Unterkörper $\mathbb{F}_p(t^p)$ liegt.
Hinweis 2: $\mathbb{F}_p(t^p)$ ist so klein, dass $(\mathbb{F}_p(t^p))^2$ in $\mathbb{F}_p(t)$ reinpasst; warum?

Aufgabe 4 (2+2 Punkte):

Sei T eine vollständige Theorie.

(a) Geben Sie ein Beispiel an, dass zeigt, dass es in der Definition von $\exists^\infty$-Elimination nicht reicht, ein einzelnes Modell von T zu betrachten. Gesucht ist also eine Struktur $\mathcal{M}$, in der die Bedingung aus Definition 2.3.7 gilt, aber so dass die Bedingung nicht in allen $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es bei der Charakterisierung von $\exists^\infty$ aus Lemma 2.3.8 reicht, ein einzelnes Modell zu betrachten; also: Ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, und existiert für jede L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ eine natürliche Zahl N, so dass $\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ entweder unendlich ist oder Kardinalität kleiner N hat für alle $\underline{b} \in M^n$, so eliminiert $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ $\exists^\infty$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT1-V-W23/

1.a) $b \in acl(A)$ $\quad \varphi(b, \underline{a})$ $\quad |\varphi(M, \underline{a})| < \aleph_0$

$M = \overset{\text{ordered set}}{\overset{\uparrow}{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{Z}$

$b = (q, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ $\quad \underbrace{(q_1, b) < \; z \; < (q_2, b)}_{\text{infinite solution.}}$

finite solution.

$(*)$ $S^n(q, z) = S^m(q, z)$

$S^n(q, z) < S^m(q', z)$

$(q, S^n(z)) < (q', S^m(z))$

$*$ infinite solution.

Ex: $(0, S^n(z)) < (1, S^m(z))$

it's always true, regardless value of z

$q = q'$ $\quad (q, S^n(z)) < (q, S^m(z))$

if $n \geq m \Rightarrow$ there is no solution

if $n < m \Rightarrow$ infinite solution.

$*$ is only possibility for the finite solution.

$$acl(A) = \{ S^n(q, z) \; : \; n \in \mathbb{Z} \}$$

$ep: b \in acl(Aa) \setminus acl(A)$

$\Downarrow$

$b = S^n(a)$ for $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a = S^{-n}(b)$

$\Rightarrow a \in acl(Ab).$

(1.b) $\dim(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) = |\mathbb{Q}|$ $\quad (\mathbb{Q}, 1)$ generate one copy of $\mathbb{Z}$, with s

$\{ (q, 1) : q \in \mathbb{Q} \}$

1.c) $X_{a,b} = \{ (x, y) \in M^2 \mid a < \overset{(q_x, 2)}{x} < \overset{(q_y, y)}{y} < b \}$

$q_x < q_y \to \dim = 2$

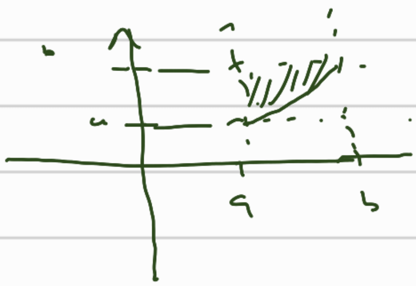
$q_x = q_y \to \dim = 0$

finitely many solution

$\text{rank}(X_{q,b}) = \max_{(x,y) \in X_{a,b}(M)} \dim_{a,b}(x, y) = 2$

$\aleph_0$-saturated

$M \prec M'$



$a = (q_a, \tilde{a})$ $\quad b = (q_b, \tilde{b})$

If $q_a = q_b \Rightarrow$ $X_{a,b}$ is finite.

$\Rightarrow rk \, X_{a,b} = 0$

If $q_a > q_b \Rightarrow$ $X_{a,b} = \emptyset \Rightarrow rk \, X_{a,b} = -\infty$

If $q_b > q_a$, $\exists x, y$ $\quad q_x \neq q_y \Rightarrow$ $\dim(acl(x, y)) = 2$

$\Rightarrow rk(X_{a,b}) \geq 2 \Rightarrow$

$rk(X_{a,b}) = 2$

2. $\operatorname{Rank}(X) \geq d$ $\pi : X \longrightarrow \pi(X) \subseteq M^d$

Let $\underline{a} \in X$ be a witness for $rk(X) \geq d$. in $\aleph_0$-saturated el. ext

then there exists d enteries which are alg. independent.

By exercise from Blatt 5. there exist $1 \leq i_1 \leq i_2 < \dots < i_d \leq n$
Such that. the projection $\pi : M^n \longrightarrow M^d$ (corresponds to $i_1, \dots, i_d$)

$rk(\pi(X)) = d.$

(3.a) $X \subseteq M^n$ $\quad f : X^2 \longrightarrow X$ inj-def

$rk(X^2) = 2rk(X)$

rk(each fiber) = 0 $\quad \Rightarrow rk(X^2) = rk(X) + 0$

$\Rightarrow rk(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{X = \emptyset}_{\text{we need to assume } X \neq \emptyset}$ or X finite ↯.

(3.b) $M = \mathbb{F}_p(t)$ $\quad M^2 \longrightarrow M$ definable injective.

$x^p \equiv x \mod p$

$\frac{f}{g} \in \mathbb{F}_p(t)$ $\quad \left(\sum_{i=1}^{l} a_i t^i\right)^p = \sum_{i=1}^{l} (a_i (t^p)^i$

$(a+b)^p = a^p + b^p$

$\Rightarrow$ for each $a \in \mathbb{F}_p(t)$, $\quad a^p \in \mathbb{F}_p(t^p)$

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{F}_p(t^p)) & \xrightarrow{1-1} & \mathbb{F}_p(t) \\
\uparrow{\scriptstyle 1:1} & & \\
(\mathbb{F}_p(t))^p & & \\
\uparrow & & \\
(\mathbb{F}_p(t))^2 & &
\end{array}$$

Then by using part (a), Th(M) doesn't have EP

(3.a)

Lemma 2.3.8: T eliminiert $\exists^\infty \iff$ Für jede L-Fml $\varphi(x,\underline{y})$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt. Ist $M \models T$ $\underline{b} \in M^n$ und $\varphi(M,\underline{b})$ endlich so ist $|\varphi(M,\underline{b})| \leq n$

$L = \{E(x,y)\ \ c\}$ — E: 2-ary-relation, c: constant.

T for each $n \in \mathbb{N}$ E has an equivalence class from cardinality n, and has one class with infinit elements. Also, c interprete as repsentative of infinite class

T has QE.

the atomic formula are $x=y$ $E(x,y)$, $E(x,c)$, $x=c$

for $\varphi(x,y) = E(x,y)$ choose $\psi(y) = E(x,c)$

in $M \models T$, $M \models \psi(b) \iff E(x,b)$ is infinite.

By compactness this theory has a model with another class of cardinality infinity (name it M'

$L \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$T \cup \{E(c_i, c_j) \mid i,j \in \mathbb{N}\} \cup \{c_i \neq c_j\} \cup \{\neg E(c, c_i)\}$

$M' \models \neg E(c,b)$

but $E(x,b)$ is infinite.

4.b) Reminder: If the condition of 2.3.8 is satisfied

Then $\psi_{n_\varphi}(y) = \exists^{>n_\varphi} x\, \varphi(x,\underline{y}) \rightsquigarrow$ there exist infinitly many solution.

In M if

$$\underbrace{\forall \underline{y} \quad \psi_{n_\varphi}(y) \longrightarrow \exists^{>n_\varphi + i}_x\ \varphi(x,\underline{y}) \quad \text{for all } i}_{\in Th(M)}$$