Kurzskript Modelltheorie I

Immi Halupczok

29. November 2023

Inhaltsverzeichnis

Modelltheorie I

1 $\aleph_0$-kategorische Theorien

In dem gesamten Kapitel sei L eine Sprache. Wenn nicht anders angegeben, ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur (wie immer mit Grundmenge M), T eine L-Theorie und $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ immer ein n-Tupel von Variablen.

1.1 Typen und Saturiertheit

Definition 1.1.1 *Sei T eine L-Theorie (nicht notwendigerweise vollständig).*

(a) *Ein* ***partieller Typ*** *(von T, in $\underline{x}$) ist eine Menge $\Sigma = \Sigma(\underline{x})$ von L-Formeln in $\underline{x}$, die „konsistent mit T ist", d. h. es existiert ein Modell $\mathcal{M} \models T$ und ein Tupel $\underline{a} \in M^n$, so dass $\mathcal{M} \models \sigma(\underline{a})$ gilt für jedes $\sigma \in \Sigma$. Ein solches Tupel $\underline{a}$ nennt man eine* ***Realisierung*** *von Σ, und wir schreiben auch $\mathcal{M} \models \Sigma(\underline{a})$, wenn $\underline{a}$ eine Realisierung von Σ ist. Existiert ein solches $\underline{a} \in M^n$, so sagen wir auch: $\Sigma(\underline{x})$ ist in $\mathcal{M}$* ***realisiert****. Ist $\underline{x}$ ein n-Tupeln, so sagen wir statt „partieller Typ in $\underline{x}$" auch „****partieller n-Typ****".*

(b) *Seien $\Sigma(\underline{x})$ und $\Sigma'(\underline{x})$ partielle Typen. Wenn jede Realisierung von $\Sigma(\underline{x})$ (in jedem Modell von T) auch eine Realisierung von $\Sigma'(\underline{x})$, so sagen wir, $\Sigma(\underline{x})$* ***impliziert*** *$\Sigma'(\underline{x})$. Notation dafür: $\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$.*
Man nennt $\Sigma(\underline{x})$ und $\Sigma'(\underline{x})$ ***äquivalent****, wenn sie sich gegenseitig implizieren. Oft werden wir äquivalente partielle Typen einfach miteinander identifizieren.*

(c) *Ein* ***vollständiger Typ*** *von T ist ein partieller Typ $p(\underline{x})$ von T, bei dem für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ entweder $\phi(\underline{x})$ selbst oder $\neg\phi(\underline{x})$ in $p(\underline{x})$ enthalten ist. Wenn wir nur* ***Typ*** *sagen, meinen wir „vollständiger Typ".*

(d) *Sei $\mathcal{M} \models T$ ein Modell. Der* ***Typ*** *eines Tupels $\underline{b} \in M^n$ ist $\mathrm{tp}(\underline{b}) := \{\phi(\underline{x}) \in L \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{b})\}$.*

Bemerkung 1.1.2 *Nach dem Kompaktheitssatz reicht es bei (a) schon zu prüfen, dass jede endliche Teilmenge $\{\phi_1(\underline{x}), \ldots, \phi_m(\underline{x})\} \subseteq \Sigma$ mit T konsistent ist, d. h. dass $T \not\models \neg\exists\underline{x}\colon (\phi_1(\underline{x}) \wedge \cdots \wedge \phi_m(\underline{x}))$.*

Wenn Σ unter Konjunktion abgeschlossen ist, reicht es sogar zu prüfen, dass jede einzelne Formel $\phi \in \Sigma$ mit T konsistent ist.

Bemerkung 1.1.3 *Jeder partielle Typ $\Sigma(\underline{x})$ lässt sich zu einem vollständigen Typ $p(\underline{x}) \supseteq \Sigma(\underline{x})$ erweitern.*

Bemerkung 1.1.4 *$\Sigma(\underline{x})$ impliziert $\Sigma'(\underline{x})$ genau dann, wenn für jede Formel $\sigma'(\underline{x}) \in \Sigma'(\underline{x})$ endlich viele Formeln $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma(\underline{x})$ existieren mit $T \models \forall\underline{x} : (\sigma_1(\underline{x}) \wedge \cdots \wedge \sigma_k(\underline{x}) \to \sigma'(\underline{x}))$.*

Definition 1.1.5 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei $A \subseteq M$.*

(a) *Ein **(partieller bzw. vollständiger) Typ** über A ist ein (partieller bzw. vollständiger) Typ von $T := \mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$.*
(b) *Der **Typ über** A eines Tupels $\underline{b} \in M^n$ ist $\mathrm{tp}(\underline{b}/A) := \{\phi(\underline{x}) \in L(A) \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{b})\}$.*

*Die Menge A nennt man in diesem Zusammenhang **Parametermenge**.*

Bemerkung 1.1.6 *Betrachtet man Typen über einer Menge $A \subseteq M$, so betrachtet man üblicherweise nur Realisierungen in elementaren Erweiterungen von $\mathcal{M}$ (und nicht in beliebigen Modellen von $\mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$.)*

Beispiel 1.1.7 *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $A \subseteq K$ sei K_0 der kleinste Unterkörper von K, der A enthält. Dann haben zwei Elemente von K den selben Typ über A genau dann, wenn*

- *beide transzendent über K_0 sind, oder*
- *beide algebraisch über K_0 sind und das gleiche Minimalpolynom haben.*

Bemerkung 1.1.8 *(Partielle) Typen $\Sigma(\underline{x})$ machen auch Sinn für unendliche Tupel $\underline{x} = (x_i)_{i \in I}$ von Variablen. In jeder einzelnen Formel kommen dann nur endlich viele der Variablen vor. Wir werden hin und wieder solche Typen in unendlich vielen Variablen betrachten. Normalerweise meinen wir mit „Typ“ aber nur einen Typ in endlich vielen Variablen.*

Definition 1.1.9 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt κ-**saturiert**, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| < \kappa$ gilt: Jeder n-Typ über A ist in $\mathcal{M}$ realisiert. Wir nennen die Struktur $\mathcal{M}$ saturiert (auch: **vollständig saturiert**), wenn sie $|\mathcal{M}|$-saturiert ist.*

Bemerkung 1.1.10 *Um zu prüfen, dass eine Struktur $\mathcal{M}$ κ-saturiert ist, reicht es zu prüfen, dass alle 1-Typen über jeder Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}'$ mit $|A| < \kappa$ realisiert sind.*

Satz 1.1.11 *Für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ und jede unendliche Kardinalzahl κ existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$, die κ-saturiert ist.*

Lemma 1.1.12 *Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $\mathcal{M}_i$ (für $i \in I$) L-Strukturen, die eine Kette bezüglich elementarer Einbettung bilden (also $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ oder $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_i$ für alle $i, j \in I$), so ist die Vereinigung $\mathcal{M} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}_i$ für alle $i \in I$.*

Notation 1.1.13 *Ist κ eine Kardinalzahl, so bezeichnet κ^+ die nächst-größere Kardinalzahl.*

Lemma 1.1.14 *Ist κ eine Kardinalzahl und A eine Teilmenge von κ^+ mit $|A| < \kappa^+$, so existiert eine Ordinalzahl $\gamma < \kappa^+$ mit $A \subseteq \gamma$.*

Bemerkung 1.1.15 *Aus dem Kompaktheitssatz folgt: Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei P eine Menge von Typen über M. Dann existiert für jedes $\kappa \geq \max\{|L|, |M|, |P|\}$ eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ der Kardinalität κ, in der jeder Typ aus P realisiert ist.*

1.2 Vollständig saturierte Modelle

Beispiel 1.2.1 $\mathbb{C}$ *(als L_{ring}-Struktur) ist vollständig saturiert.*

Satz 1.2.2 *Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ saturierte L-Strukturen mit $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ und $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'|$, so sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ bereits isomorph.*

Definition 1.2.3 *Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ L-Strukturen und seien $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$ Teilmengen. Eine Bijektion $f\colon A \to A'$ heißt **elementar**, wenn für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ und jedes Tupel $\underline{a} \in A^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{M}' \models \phi(f(\underline{a}))$.*

Bemerkung 1.2.4 *Existiert eine elementare Bijektion $f\colon A \to A'$ zwischen beliebigen Teilmengen $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$, so sind M und M' bereits elementar äquivalent.*

Bemerkung: Sei $\underline{a} := (a_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ eine Aufzählung von A (für eine Ordinzahlzahl γ und $\underline{a}' := f(\underline{a})$ (also $a'_\alpha := f(a_\alpha)$ für alle $\alpha < \gamma$). Die Abbildung f elementar genau dann, wenn $\mathrm{tp}(\underline{a}/\emptyset) = \mathrm{tp}(\underline{a}'/\emptyset)$.

Definition 1.2.5 *Sei $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ L-Strukturen und sei $f\colon A \to A'$ eine elementare Abbildung zwischen Teilmengen $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$. Sei außerdem $\Sigma(\underline{x})$ ein partieller Typ über A. Dann setzen wir*

$$f(\Sigma) := \{\phi(\underline{x}, f(\underline{a})) \mid \phi(\underline{x}, \underline{a}) \in \Sigma\}.$$

Bemerkung 1.2.6 $f(\Sigma)$ *ist wieder ein partieller Typ (d. h. konsistent). Ist p ein vollständiger Typ über A, so ist $f(p)$ ein vollständiger Typ über A'.*

Korollar 1.2.7 *Sei $\mathcal{M}$ saturiert. Dann gilt für jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit $|A| < |M|$ und jedes Paar von Tupeln $\underline{b}, \underline{b}' \in M^n$: $\mathrm{tp}(\underline{b}/A) = \mathrm{tp}(\underline{b}'/a)$ genau dann, wenn ein Automorphismus $\alpha\colon M \to M$ existiert mit $\alpha(a) = a$ für alle $a \in A$ und $\alpha(\underline{b}) = \underline{b}'$.*

1.3 Die Typen als topologischer Raum

Definition 1.3.1 *Sei T eine L-Theorie (nicht notwendigerweise vollständig) und sei $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Tupel von Variablen.*

(a) *Die Menge aller (vollständigen) Typen von T in $\underline{x}$ wird mit $S_{\underline{x}}(T)$ oder $S_n(T)$ bezeichnet; man nennt dies den* ***Typenraum****.*

(b) *Ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und $A \subseteq M$ eine Parametermenge, so wird der Raum $S_{\underline{x}}(\mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M}))$ aller Typen über A in $\underline{x}$ auch mit $S_{\underline{x}}(A)$ oder $S_n(A)$ bezeichnet.*

Notation 1.3.2 *Wir verwenden einige abkürzende Notationen für Parametermengen: Ist $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in M^n$, so ist $S_n(\underline{b})$ eine Kurzschreibweise für $S_n(\{b_1, \dots, b_n\})$. Schreiben wir mehrere Dinge hintereinander, so ist die Vereinigung gemeint; z. B. ist $S_n(AA'\underline{b})$ (für Mengen $A, A' \subseteq M$) eine Kurzschreibweise für $S_n(A \cup A' \cup \{b_1, \dots, b_n\})$. Die gleichen Abkürzungen werden auch für Typen über Mengen verwendet:* $\mathrm{tp}(c/\underline{b})$, $\mathrm{tp}(c/AA'\underline{b})\dots$

Definition 1.3.3 *Eine Teilmenge von $S_{\underline{x}}(T)$ heißt* ***abgeschlossen****, wenn sie die Form*

$$X_\Sigma := \{p(\underline{x}) \in S_{\underline{x}}(T) \mid \Sigma \subseteq p\},$$

hat für eine Menge Σ von L-Formeln in $\underline{x}$.

Bemerkung 1.3.4 *Für partielle Typen $\Sigma(\underline{x}), \Sigma'(\underline{x})$ gilt: $\Sigma \models \Sigma'$ genau dann, wenn $X_\Sigma \subseteq X_{\Sigma'}$. Insbesondere sind zwei Formeln $\phi(\underline{x})$ und $\phi'(\underline{x})$ äquivalent modulo T genau dann, wenn $X_{\{\phi\}} = X_{\{\phi'\}}$ ist.*

Lemma 1.3.5 *Mit der obigen Definition von abgeschlossenen Mengen wird $S_{\underline{x}}(T)$ zu einem kompakten, Hausdorffschen topologischen Raum.*

Lemma 1.3.6 *Eine Teilmenge von $S_{\underline{x}}(T)$ ist offen und abgeschlossen („abgeschlossen") genau dann, wenn sie die Form $X_{\{\phi\}}$ hat, für eine L-Formel $\phi(\underline{x})$. Diese Mengen bilden eine Basis der Topologie von $S_{\underline{x}}(T)$.*

Definition 1.3.7 *Ein partieller Typ $\Sigma(\underline{x})$ heißt* ***isoliert****, wenn er von einem partiellen Typ impliziert wird, der aus einer einzigen Formel $\phi(\underline{x})$ besteht. Man sagt auch „ϕ* ***isoliert*** *Σ".*

Bemerkung 1.3.8 *Ein vollständiger Typ p von einer Formel ϕ isoliert genau dann, wenn $\phi \in p$ ist und $\phi \models p$.*

Lemma 1.3.9 *Ein Typ $p \in S_{\underline{x}}(T)$ ist isoliert genau dann, wenn er als Punkt des topologischen Raums $S_{\underline{x}}(T)$ isoliert ist, d. h. wenn die Menge $\{p\}$ offen ist.*

Lemma 1.3.10 *Ist T vollständig und $p \in S_{\underline{x}}(T)$ isoliert, so ist p in jedem Modell von T realisiert. Insbesondere ist für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ und jede Teilmenge $A \subseteq M$ jeder isolierte Typ über A bereits in $\mathcal{M}$ realisiert.*

Lemma 1.3.11 *Hat eine Theorie T unendlich viele n-Typen, so hat sie insbesondere auch nicht-isolierte n-Typen.*

1.4 Der Satz von Ryll-Nardzewski

Definition 1.4.1 *Sei T eine Theorie und $\kappa \geq \aleph_0$ eine Kardinalzahl. T heißt κ-katerogisch, wenn T bis auf Isomorphie genau ein Modell der Kardinalität κ hat.*

Beispiel 1.4.2
- *Sei $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$. Die Theorie ACF_p der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p ist κ-kategorisch für jedes $\kappa \geq \aleph_1$ aber nicht $\aleph_0$-kategorisch.*
- *Ist K ein Körper, so ist die $L_{K\text{-VR}}$-Theorie der K-Vektorräume κ-kategorisch für jedes $\kappa > |K|$.*
- *Die Theorie DLO der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte ist $\aleph_0$-kategorisch aber nicht κ-kategorisch für jedes $\kappa \geq \aleph_1$*

Satz 1.4.3 („omitting types") *Sei L eine höchstens abzählbare Sprache, sei T eine L-Theorie und sei $\Sigma(\underline{x})$ ein nicht-isolierter partieller Typ. Dann existiert ein Modell $\mathcal{M} \models T$, in dem Σ nicht realisiert ist.*

Satz 1.4.4 (Ryll-Nardzewski) *Sei L eine höchstens abzählbare Sprache und sei T eine vollständige L-Theorie. Dann sind äquivalent:*

(a) *T ist $\aleph_0$-kategorisch.*
(b) *Jedes abzählbare Modell von T ist saturiert.*
(c) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Äquivalenz modulo T nur endlich viele L-Formeln $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.*
(d) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $S_n(T)$ endlich.*

Bemerkung 1.4.5 *Es gilt allgemeiner, für vollständige Theorien T in abzählbaren Sprachen L : Ist $\kappa \geq \aleph_0$ beliebig, so ist T κ-kategorisch genau dann, wenn jedes Modell von T der Kardinalität κ saturiert ist.*

Bemerkung 1.4.6 *Ist T wie in Satz 1.4.4 und $\mathcal{M} \models T$ ein abzählbares Modell, so kann man die gesamte Modelltheorie an $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ ablesen:*

(a) *Zwei Tupel $\underline{a}, \underline{b} \in M^n$ haben den gleichen Typ genau dann, wenn ein Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ existiert, der $\underline{a}$ auf $\underline{b}$ abbildet. (Strukturen mit dieser Eigenschaft nennt man **ultrahomogen**.)*
(b) *Eine Teilmenge $X \subseteq M^n$ ist L-definierbar genau dann, wenn für jeden Autormophismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ gilt: $\alpha(X) = X$.*

2 Dimension und Rang

2.1 Der modelltheoretische algebraische Abschluss

Sei L eine Sprache und $\mathcal{M}$ eine L-Struktur.

Definition 2.1.1 *Der **definierbare Abschluss** einer Menge $A \subseteq M$ ist die Menge aller A-definierbaren Elemente von M; Notation dafür:* $\mathrm{dcl}(A)$ *oder* $\mathrm{dcl}_L(A)$.

Beispiel 2.1.2 (a) *Ist V ein K-Vektorraum (als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur) und $A \subseteq V$, so ist* $\mathrm{dcl}(A) = \langle A \rangle_K$.

(b) *Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* 0 *(als L_{ring}-Struktur) und $A \subseteq K$, so ist* $\mathrm{dcl}(A) = \mathbb{Q}(A)$.

Definition 2.1.3 *Sei $A \subseteq M$.*

(a) *Ein Element $b \in M$ heißt **algebraisch** über A, wenn eine endliche, A-definierbare Menge $X \subseteq M$ existiert, die b enthält.*
(b) *Der **algebraische Abschluss** von A ist die Menge aller über A algebraischen Elemente von M; Notation dafür:* $\mathrm{acl}(A)$ *oder* $\mathrm{acl}_L(A)$.
(c) *Ein Typ $p \in S_1(A)$ heißt algebraisch, wenn er eine $L(A)$-Formel $\phi(x)$ enthält, die eine endliche Menge definiert.*

Beispiel 2.1.4 (a) *Ist V ein K-Vektorraum und $A \subseteq V$, so ist* $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{dcl}(A)$.

(b) *Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \subseteq K$, so ist* $\mathrm{acl}(A)$ *der algebraische Abschluss des Körpers* $\mathrm{dcl}(A)$.

Bemerkung 2.1.5 *Algebraische Typen sind isoliert, aber nicht jeder isolierte Typ ist algebraisch.*

Bemerkung 2.1.6 *Ist $M \prec M'$, so gilt (in $\mathcal{M}'$):* $M = \mathrm{acl}(M)$.

Bemerkung 2.1.7 *Ist $p \in S_1(A)$ ein isolierter Typ, so gilt:*

(a) *Ist p algebraisch, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass p in jedem Modell $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ genau n Realisierungen hat.*
(b) *Ist p nicht-algebraisch, so hat p in jedem Modell $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ unendlich viele Realisierungen.*

Lemma 2.1.8 *Für $A, B \subseteq M$ gilt:*

(a) $A \subseteq \mathrm{acl}(A)$
(b) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$
(c) $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$

(d) $\operatorname{acl}(A) = \bigcup_{\substack{A_0 \subseteq A \\ A_0 \text{ endl.}}} \operatorname{acl}(A_0)$

Definition 2.1.9 *Sei T eine vollständige L-Theorie. Man sagt „*acl *hat die* ***Austauscheigenschaft*** *(in T)“, wenn für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ gilt: Sind $A \subseteq M$ und $b, c \in M$ mit $c \in \operatorname{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \operatorname{acl}(A)$, so ist $b \in \operatorname{acl}(A \cup \{c\})$.*

Beispiel 2.1.10 *In den Theorien der folgenden Strukturen hat* acl *die Austauscheigenschaft:*

(a) *K-Vektorräume, in der Sprache L_{RV}*
(b) *algebraisch abgeschlossene Körper, in der Ring-Sprache*
(c) *$\mathbb{R}$ in der Sprache der Ringe oder der angeordneten Ringe; und allgemeiner: jede o-minimale Struktur*
(d) *$\mathbb{Q}$ in der Sprache der Gruppen oder der angeordneten Gruppen*
(e) *$\mathbb{Z}$ in der Sprache der Gruppen oder der angeordneten Gruppen*
($\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ hat Quantoren-Elimination in den Sprachen $L_1 = \{0, +, -\} \cup \{P_k \mid k \geq 2\}$ und $L_2 = \{0, 1, +, -, <\} \cup \{P_k \mid k \geq 2\}$, wobei P_k ein Prädikat für $k\mathbb{Z}$ ist.)

Für den Rest von Abschnitt 2.1 nehmen wir an, dass acl die Austauscheigenschaft in $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ hat.

Definition 2.1.11 (a) *Eine Menge $A \subseteq M$ heißt* ***algebraisch unabhängig****, wenn für alle $a \in A$ gilt: $a \notin \operatorname{acl}(A \setminus \{a\})$.*
(b) *Eine Menge $A \subseteq M$ heißt* ***algebraisch abgeschlossen****, wenn $\operatorname{acl} A = A$ gilt.*
(c) *Eine* ***Basis*** *einer algebraisch abgeschlossenen Menge $A \subseteq M$ ist eine algebraisch unabhängige Menge $B \subseteq A$ mit $\operatorname{acl}(B) = A$.*

Lemma 2.1.12 *Ist $A \subseteq M$ algebraisch unabhängig und $b \in M \setminus \operatorname{acl}(A)$, so ist auch $A \cup \{b\}$ algebraisch unabhängig.*

Satz 2.1.13 *Sei $A \subseteq M$ algebraisch abgeschlossen. Ist $B \subseteq M$ algebraisch unabhängig, so existiert eine Basis B' von A mit $B \subseteq B'$. Insbesondere besitzt A (mindestens) eine Basis.*

Satz 2.1.14 *Sei $A \subseteq M$ algebraisch abgeschlossen. Alle Basen von A haben die gleiche Kardinalität.*

Definition 2.1.15 *Die* ***Dimension*** $\dim A$ *einer algebraisch abgeschlossenen Menge $A \subseteq M$ ist die Kardinalität einer (beliebigen) Basis von A.*

Beispiel 2.1.16 *Für Untervektorräume $U \subseteq V$ eines K-Vektorraums V (als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur) ist die Dimension von U im Sinne von Definition 2.1.15 die normale Dimension im Sinne der linearen Algebra.*

Definition 2.1.17 *Der* ***Transzendenzgrad*** $\operatorname{trdeg} K$ *eines Körper* K *ist die Dimension von* K^{alg}*, als* L_{ring}*-Struktur. Eine* ***Transzendenzbasis*** *von* K *ist eine Basis* $B \subseteq K$ *von* K^{alg}*.*

Bemerkung: Transzendenzbasen existieren. Allgemeiner gilt, für $A \subseteq M$ beliebig: Es gibt eine Basis von $\operatorname{acl}(A)$, die in A liegt.

Lemma 2.1.18 *Für* $A \subseteq M$ *gilt:* $|\operatorname{acl}(A)| \leq \max\{|A|, |L|, \aleph_0\}$*. Insbesondere gilt für algebraisch abgeschlossene* A *mit* $|A| > \max\{|L|, \aleph_0\}$*:* $\dim A = |A|$*.*

Lemma 2.1.19 *Sei* $A \subseteq M$*. Wenn* acl_L *die Austauscheigenschaft hat (in* $\operatorname{Th}_L(\mathcal{M})$*), so hat auch* $\operatorname{acl}_{L(A)}$ *die Austauscheigenschaft (in* $\operatorname{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$*).*

Definition 2.1.20 *Ist* $A \subseteq M$*, so meinen wir bei den Betriffen „algebraisch unabhängig“, „Basis“, „Dimension“ mit „****über*** A*“, dass wir in der Sprache* $L(A)$ *arbeiten. Die Dimension über* A *einer Menge* $B = \operatorname{acl}_{L(A)}(B) \subseteq M$ *wird auch als „****relative Dimension*** *über* A*“ bezeichnet, und die Notation dafür ist* $\dim_A(B)$ *(oder* $\dim_{L(A)}(B)$*).*

Bemerkung 2.1.21 *Für all die obigen Begriffe macht es keinen Unterschied, ob wir über einer Menge* $A \subseteq M$ *oder über* $\operatorname{acl}(A)$ *arbeiten. (Z. B. gilt, für* $B \subseteq M$ *algebraisch abgeschlossen über* A*:* $\dim_A(B) = \dim_{\operatorname{acl}(A)}(B)$*.)*

Lemma 2.1.22 *Seien* $A \subseteq B \subseteq M$ *algebraisch abgeschlossen. Dann gilt:* $\dim B = \dim A + \dim_A B$*.*

Definition 2.1.23 *Seien* $K_1 \subseteq K_2$ *Körper. Wir fassen beide Körper als Teilmengen der* L_{ring}*-Struktur* K_2^{alg} *auf. Der* ***Transzendenzgrad*** $\operatorname{trdeg}(K_2/K_1)$ *von* K_2 *über* K_1 *ist die relative Dimension (im Sinne von Definition 2.1.20) von* K_2^{alg} *über* K_1*. Eine* ***Transzendenzbasis*** *von* K_2 *über* K_1 *ist eine Basis* $B \subseteq K_2$ *von* K_2^{alg} *über* K_1*.*

2.2 Streng minimale Strukturen

Definition 2.2.1 (a) *Eine vollständige Theorie* T*, deren Modelle unendlich sind, heißt* ***streng minimal****, wenn für alle Modelle* $\mathcal{M} \models T$ *gilt: Jede definierbare Teilmenge* $X \subseteq M$ *ist entweder endlich oder ko-endlich.*

(b) *Eine unendliche Struktur* $\mathcal{M}$ *heißt* ***streng minimal****, wenn* $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ *streng minimal ist.*

Bemerkung 2.2.2 *Ist* $\mathcal{M}$ *eine streng minimale* L*-Struktur und* $A \subseteq M$*, so ist* $\mathcal{M}$ *auch als* $L(A)$*-Struktur streng minimal.*

Beispiel 2.2.3 *Die folgenden Strukturen sind streng minimal:*

(a) *jede unendliche Menge, in der leeren Sprache*
(b) *jeder unendliche K-Vektorraum, als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur (für jeden Körper K)*
(c) *jeder algebraisch abgeschlossene Körper, als L_{ring}-Struktur.*

Lemma 2.2.4 *Sei $\mathcal{M}$ streng minimal und sei $\underline{b} \in M^n$ ein Tupel mit $b_i \notin \operatorname{acl}(b_1, \dots, b_{i-1})$ für $i = 1, \dots n$. Sei außerdem $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und $\underline{b}' \in (M')^n$ ein Tupel, das die analoge Bedingung zu $\underline{b}$ erfüllt. Dann ist $\operatorname{tp}(\underline{b}/\emptyset) = \operatorname{tp}(\underline{b}'/\emptyset)$.*

Satz 2.2.5 *Ist $\mathcal{M}$ streng minimal, so hat* acl *die Austauscheigenschaft (in* $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$*).*

Korollar 2.2.6 *Sei $\mathcal{M}$ streng minimal und $A \subseteq M$. Dann besteht $S_1(A)$ genau aus:*

- *allen algebraischen* 1*-Typen über A*
- *genau einem nicht-algebraischen Typ über A.*

Insbesondere: Falls $|M| > \max\{|L|, \aleph_0\}$ ist, ist $\mathcal{M}$ vollständig saturiert.

Korollar 2.2.7 *Sei $\mathcal{M}$ streng minimal. Sind $\underline{a}, \underline{a}' \in M^\alpha$ zwei Tupel gleicher Länge (für $\alpha \in \mathrm{On}$), die beide (einzeln) algebraisch unabhängig sind, so ist $\operatorname{tp}(\underline{a}/\emptyset) = \operatorname{tp}(\underline{a}'/\emptyset)$.*

Satz 2.2.8 *Ist $\mathcal{M}$ streng minimal, so gilt für Teilmengen $A \subseteq M$: A ist eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{M}$ genau dann, wenn A algebraisch abgeschlossen und unendlich ist.*

Satz 2.2.9 *Sei T streng minimal. Dann existiert eine Kardinalzahl $\kappa \leq \aleph_0$, so dass die Modelle von T genau die folgenden sind: Für jedes $\mu \geq \kappa$ existiert (bis auf Isomorphie) genau ein Modell der Dimension μ.*

Lemma 2.2.10 *Ist $f\colon A \to A'$ eine elementare Bijektion zwischen Teilmengen $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$ von L-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$, so lässt sich f zu einer elementaren Bijektion von $\operatorname{acl}(A)$ nach $\operatorname{acl}(A')$ fortsetzen.*

Korollar 2.2.11 *Sei T streng minimal, so ist T κ-kategorisch für jedes $\kappa > \max\{|L|, \aleph_0\}$.*

2.3 Der acl-Rang von definierbaren Mengen

In diesem Abschnitt fixieren wir eine vollständige Theorie T mit unendlichen Modellen, und wir nehmen bis auf weiteres an, dass acl in T die Austauscheigenschaft besitzt.

Definition 2.3.1 *Sei $X := \phi(\mathcal{M}) \subseteq M^n$ eine A-definierbare Menge für eine Teilmenge $A \subseteq M$. Der* ***Rang*** *(oder „acl-Rang“) von X ist definiert als*

$$\operatorname{rk}(X) := \max_{\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}} \max_{\underline{b} \in \phi(\mathcal{M}')} \dim_A \operatorname{acl}_A(\underline{b}).$$

Ein solches $\underline{b}$ nennen wir einen ***Zeugen*** *des Rangs von X. Wir setzen $\operatorname{rk} \emptyset := -\infty$.*

Wenn wir betonen wollen, dass die Definition von $\operatorname{rk} X$ auch von der Menge A abhängt, sagen wir „Rang von X über A“.

Satz 2.3.2 *Sei $X = \phi(\mathcal{M}) \subseteq M^n$ eine A-definierbare Menge, für eine Teilmenge $A \subseteq M$. Dann kann der Rang von X über A in jeder $|A|^+$-saturierten elementaren Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ berechnet werden, d. h. es existiert ein $\underline{b} \in \phi(\mathcal{M}')$ mit $\operatorname{rk}(X) = \dim_A \operatorname{acl}_A(\underline{b})$.*

Satz 2.3.3 *Der Rang einer definierbaren Menge $X \subseteq M^n$ hängt nur von der Menge X selbst ab, und nicht von der Menge A. (Also genauer: Ist X sowohl A- als auch A'-definierbar, so ist der Rang von X über A gleich dem Rang von X über A'.)*

Lemma 2.3.4 *(In diesem Lemma nehmen wir nicht an, dass* acl *die Austauscheigenschaft in $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ hat.) Sei $A \subseteq M$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{M}$ $|A|^+$-saturiert ist. Dann gibt es in jeder unendlichen definierbaren Menge $X \subseteq M$ Elemente, die nicht algebraisch über A sind.*

Satz 2.3.5 *Seien $X, X' \subseteq M^m$ und $Y \subseteq M^n$ definierbare Mengen. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{rk}(X) = 0$ *genau dann, wenn X endlich aber nicht leer ist.*
(b) $\operatorname{rk}(M) = 1$.
(c) $\operatorname{rk}(X \cup X') = \max\{\operatorname{rk}(X), \operatorname{rk}(X')\}$.
Insbesondere: $X \subseteq X' \Rightarrow \operatorname{rk}(X) \leq \operatorname{rk}(X')$.
(d) *Für $\diamond \in \{\leq, =, \geq\}$: Ist $r \in \mathbb{N}$ und ist $f \colon X \to Y$ eine definierbare Abbildung, so dass $\operatorname{rk}(f^{-1}(\underline{b})) \diamond r$ gilt für jedes $\underline{b} \in Y$, so ist $\operatorname{rk}(X) \diamond r + \operatorname{rk}(Y)$.*
Insbesondere gilt $\operatorname{rk}(X \times Y) = \operatorname{rk}(X) + \operatorname{rk}(Y)$, und wenn eine definierbare Bijektion $f \colon X \to Y$ existiert, so ist $\operatorname{rk}(X) = \operatorname{rk}(Y)$.

Bemerkung 2.3.6 *Ist $f \colon X \to Y$ eine definierbare Abbildung, so dass alle Fasern $f^{-1}(\underline{b})$ den gleichen Rang haben (für $\underline{b} \in Y$), so gilt: Ein Element $\underline{a} \in X$ ist Zeuge für den Rang von X genau dann, wenn $\underline{b} := f(\underline{a})$ ein Zeuge für den Rang von Y ist und $\underline{a}$ ein Zeuge für den Rang der Faser $f^{-1}(\underline{b})$.*

Wir hören jetzt wieder auf anzunehmen, dass acl in T die Austauscheigenschaft besitzt.

Definition 2.3.7 *Eine L-Theorie T* ***„eliminiert $\exists^\infty$“****, wenn zu jeder L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ eine L-Formel $\psi(\underline{y})$ existiert, so dass für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jedes*

Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \psi(\underline{b})$ genau dann, wenn unendlich viele $a \in M$ existieren mit $\mathcal{M} \models \phi(a, \underline{b})$.

Lemma 2.3.8 *Eine Theorie T eliminiert $\exists^\infty$ genau dann, wenn für jede L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ eine natürliche Zahl N existiert, so für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jedes Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: Entweder $\phi(M, \underline{b})$ ist unendlich oder $|\phi(M, \underline{b})| \leq N$.*

Beispiel 2.3.9 *Streng minimale und o-minimale Theorien eliminieren $\exists^\infty$.*

Satz 2.3.10 *Ist T eine Theorie, in der* acl *die Austauscheigenschaft besitzt und die außerdem $\exists^\infty$ eliminiert, so „ist der Rang definierbar“ im folgenden Sinn: Für jede Formel L-Formel $\phi(x_1, \dots, x_n, \underline{y})$ existieren Formeln $\psi_{-\infty}(\underline{y}), \psi_0(\underline{y}), \dots, \psi_n(\underline{y})$, so dass für alle $\underline{b}$ gilt: $\operatorname{rk}(\phi(\mathcal{M}, \underline{b})) = d$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \psi_d(\underline{b})$ gilt.*

Korollar 2.3.11 *Ist $\mathcal{M}$ o-minimal, so ist der obige Rang einer definierbaren Menge $X \subseteq M^n$ gleich der Dimension von X im Sinne des letzten Semesters.*

2.4 Algebraisch abgeschlossene Körper

In diesem Abschitt sei k immer ein Körper und K ein $\max\{|k|^+, \aleph_0\}$-saturierter algebraisch abgeschlossener Körper, der k enthält. Wir arbeiten in der Sprache $L = L_{\text{ring}}(k)$.

Definition 2.4.1 *Sei $F \subseteq k[\underline{x}]$ eine beliebige Menge von Polynomen. Wir definieren $V(F) := \{\underline{a} \in K^n \mid \forall f \in F \colon f(\underline{a}) = 0\}$. Teilmengen von K^n der Form $V(F)$ nennt man **algebraisch** (über k) oder auch **Zariski-abgeschlossen** (über k).*

Bemerkung 2.4.2 *Ist $I = (F) \triangleleft k[\underline{x}]$ das von F erzeugte Ideal, so ist $V(I) = V(F)$. Insbesondere hängt $V(F)$ nur davon ab, welches Ideal F erzeugt.*

Bemerkung 2.4.3 *Die Zariski-abgeschlossenen Mengen machen K^n zu einem topologischen Raum. Man nennt dies die **Zariski-Topologie** (über k). Den Abschluss einer Menge $Y \subseteq K^n$ bezüglich der Zariski-Topologie nennt man den **Zariski-Abschluss** Y^{Zar} von Y.*

Im Folgenden werden wir immer über k arbeiten und dies deshalb nicht jedes Mal erwähnen.

Definition 2.4.4 *Für $Y \subseteq K^n$ beliebig setzt man $I(Y) := \{f \in k[\underline{x}] \mid \forall \underline{a} \in Y \colon f(\underline{a}) = 0\}$.*

Bemerkung 2.4.5 *Für $Y \subseteq K^n$ beliebig gilt: $I(Y)$ ist ein Ideal, und $V(I(Y)) = Y^{\text{Zar}}$.*

Im folgenden sind alle Ringe kommutativ und mit 1.

Definition 2.4.6 *Ein Ring R heißt* ***noethersch****, wenn keine unendliche aufsteigende Kette von Idealen $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$ in R existiert.*

Lemma 2.4.7 *In einem noetherschen Ring ist jedes Ideal I endlich erzeugt, d. h. es existieren (endlich viele) $a_1, \dots, a_n \in R$ so dass $I = (a_1, \dots, a_n)$ ist.*

Satz 2.4.8 *Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch $R[x]$ noethersch. Insbesondere ist $k[\underline{x}]$ noethersch.*

Korollar 2.4.9 *Jede algebraische Menge kann durch endlich viele Polynome definiert werden. Insbesondere sind partielle Typen, die nur aus polynomialen Gleichungen bestehen, isoliert.*