Kurzskript Modelltheorie I

Immi Halupczok

11. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

Modelltheorie I **2**

1 $\aleph_0$-kategorische Theorien **2**
1.1 Typen und Saturiertheit 2
1.2 Vollständig saturierte Modelle 4
1.3 Die Typen als topologischer Raum 5
1.4 Der Satz von Ryll-Nardzewski 6

2 Dimension und Rang **7**
2.1 Der modelltheoretische algebraische Abschluss 7
2.2 Streng minimale Strukturen 9
2.3 Der acl-Rang von definierbaren Mengen 10
2.4 Algebraisch abgeschlossene Körper 12
2.5 Der Morley-Rang 15

3 Imaginäre Elemente **18**
3.1 Mehrsortige Sprachen 18
3.2 Imaginäre Elemente und Imaginären-Elimination 19
3.3 Codes für definierbare Mengen 21
3.4 Imaginären-Elimination in ACF 22

Modelltheorie I

1 $\aleph_0$-kategorische Theorien

In dem gesamten Kapitel sei L eine Sprache. Wenn nicht anders angegeben, ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur (wie immer mit Grundmenge M), T eine L-Theorie und $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ immer ein n-Tupel von Variablen.

1.1 Typen und Saturiertheit

Definition 1.1.1 *Sei T eine L-Theorie (nicht notwendigerweise vollständig).*

(a) *Ein **partieller Typ** (von T, in $\underline{x}$) ist eine Menge $\Sigma = \Sigma(\underline{x})$ von L-Formeln in $\underline{x}$, die „konsistent mit T ist", d. h. es existiert ein Modell $\mathcal{M} \models T$ und ein Tupel $\underline{a} \in M^n$, so dass $\mathcal{M} \models \sigma(\underline{a})$ gilt für jedes $\sigma \in \Sigma$. Ein solches Tupel $\underline{a}$ nennt man eine **Realisierung** von Σ, und wir schreiben auch $\mathcal{M} \models \Sigma(\underline{a})$, wenn $\underline{a}$ eine Realisierung von Σ ist. Existiert ein solches $\underline{a} \in M^n$, so sagen wir auch: $\Sigma(\underline{x})$ ist in $\mathcal{M}$ **realisiert**. Ist $\underline{x}$ ein n-Tupeln, so sagen wir statt „partieller Typ in $\underline{x}$" auch „**partieller n-Typ**".*

(b) *Seien $\Sigma(\underline{x})$ und $\Sigma'(\underline{x})$ partielle Typen. Wenn jede Realisierung von $\Sigma(\underline{x})$ (in jedem Modell von T) auch eine Realisierung von $\Sigma'(\underline{x})$, so sagen wir, $\Sigma(\underline{x})$ **impliziert** $\Sigma'(\underline{x})$. Notation dafür: $\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$.*
*Man nennt $\Sigma(\underline{x})$ und $\Sigma'(\underline{x})$ **äquivalent**, wenn sie sich gegenseitig implizieren. Oft werden wir äquivalente partielle Typen einfach miteinander identifizieren.*

(c) *Ein **vollständiger Typ** von T ist ein partieller Typ $p(\underline{x})$ von T, bei dem für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ entweder $\phi(\underline{x})$ selbst oder $\neg\phi(\underline{x})$ in $p(\underline{x})$ enthalten ist. Wenn wir nur **Typ** sagen, meinen wir „vollständiger Typ".*

(d) *Sei $\mathcal{M} \models T$ ein Modell. Der **Typ** eines Tupels $\underline{b} \in M^n$ ist $\operatorname{tp}(\underline{b}) := \{\phi(\underline{x}) \in L \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{b})\}$.*

Bemerkung 1.1.2 *Nach dem Kompaktheitssatz reicht es bei (a) schon zu prüfen, dass jede endliche Teilmenge $\{\phi_1(\underline{x}), \ldots, \phi_m(\underline{x})\} \subseteq \Sigma$ mit T konsistent ist, d. h. dass $T \not\models \neg\exists\underline{x}\colon (\phi_1(\underline{x}) \wedge \cdots \wedge \phi_m(\underline{x}))$.*

Wenn Σ unter Konjunktion abgeschlossen ist, reicht es sogar zu prüfen, dass jede einzelne Formel $\phi \in \Sigma$ mit T konsistent ist.

Bemerkung 1.1.3 *Jeder partielle Typ $\Sigma(\underline{x})$ lässt sich zu einem vollständigen Typ $p(\underline{x}) \supseteq \Sigma(\underline{x})$ erweitern.*

Bemerkung 1.1.4 *$\Sigma(\underline{x})$ impliziert $\Sigma'(\underline{x})$ genau dann, wenn für jede Formel $\sigma'(\underline{x}) \in \Sigma'(\underline{x})$ endlich viele Formeln $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma(\underline{x})$ existieren mit $T \models \forall\underline{x} : (\sigma_1(\underline{x}) \wedge \cdots \wedge \sigma_k(\underline{x}) \to \sigma'(\underline{x}))$.*

Definition 1.1.5 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei $A \subseteq M$.*

(a) *Ein **(partieller bzw. vollständiger) Typ** über A ist ein (partieller bzw. vollständiger) Typ von $T := \mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$.*
(b) *Der **Typ über** A eines Tupels $\underline{b} \in M^n$ ist $\mathrm{tp}(\underline{b}/A) := \{\phi(\underline{x}) \in L(A) \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{b})\}$.*

*Die Menge A nennt man in diesem Zusammenhang **Parametermenge**.*

Bemerkung 1.1.6 *Betrachtet man Typen über einer Menge $A \subseteq M$, so betrachtet man üblicherweise nur Realisierungen in elementaren Erweiterungen von $\mathcal{M}$ (und nicht in beliebigen Modellen von $\mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$.)*

Beispiel 1.1.7 *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $A \subseteq K$ sei K_0 der kleinste Unterkörper von K, der A enthält. Dann haben zwei Elemente von K den selben Typ über A genau dann, wenn*

- *beide transzendent über K_0 sind, oder*
- *beide algebraisch über K_0 sind und das gleiche Minimalpolynom haben.*

Bemerkung 1.1.8 *(Partielle) Typen $\Sigma(\underline{x})$ machen auch Sinn für unendliche Tupel $\underline{x} = (x_i)_{i \in I}$ von Variablen. In jeder einzelnen Formel kommen dann nur endlich viele der Variablen vor. Wir werden hin und wieder solche Typen in unendlich vielen Variablen betrachten. Normalerweise meinen wir mit „Typ“ aber nur einen Typ in endlich vielen Variablen.*

Definition 1.1.9 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt κ-**saturiert**, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}$ mit $|A| < \kappa$ gilt: Jeder n-Typ über A ist in $\mathcal{M}$ realisiert. Wir nennen die Struktur $\mathcal{M}$ saturiert (auch: **vollständig saturiert**), wenn sie $|\mathcal{M}|$-saturiert ist.*

Bemerkung 1.1.10 *Um zu prüfen, dass eine Struktur $\mathcal{M}$ κ-saturiert ist, reicht es zu prüfen, dass alle 1-Typen über jeder Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}'$ mit $|A| < \kappa$ realisiert sind.*

Satz 1.1.11 *Für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ und jede unendliche Kardinalzahl κ existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$, die κ-saturiert ist.*

Lemma 1.1.12 *Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $\mathcal{M}_i$ (für $i \in I$) L-Strukturen, die eine Kette bezüglich elementarer Einbettung bilden (also $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ oder $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_i$ für alle $i, j \in I$), so ist die Vereinigung $\mathcal{M} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}_i$ für alle $i \in I$.*

Notation 1.1.13 *Ist κ eine Kardinalzahl, so bezeichnet κ^+ die nächst-größere Kardinalzahl.*

Lemma 1.1.14 *Ist κ eine Kardinalzahl und A eine Teilmenge von κ^+ mit $|A| < \kappa^+$, so existiert eine Ordinalzahl $\gamma < \kappa^+$ mit $A \subseteq \gamma$.*

Bemerkung 1.1.15 *Aus dem Kompaktheitssatz folgt: Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei P eine Menge von Typen über M. Dann existiert für jedes $\kappa \geq \max\{|L|, |M|, |P|\}$ eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ der Kardinalität κ, in der jeder Typ aus P realisiert ist.*

1.2 Vollständig saturierte Modelle

Beispiel 1.2.1 $\mathbb{C}$ *(als L_{ring}-Struktur) ist vollständig saturiert.*

Satz 1.2.2 *Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ saturierte L-Strukturen mit $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ und $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'|$, so sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ bereits isomorph.*

Definition 1.2.3 *Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ L-Strukturen und seien $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$ Teilmengen. Eine Bijektion $f\colon A \to A'$ heißt **elementar**, wenn für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ und jedes Tupel $\underline{a} \in A^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{M}' \models \phi(f(\underline{a}))$.*

Bemerkung 1.2.4 *Existiert eine elementare Bijektion $f\colon A \to A'$ zwischen beliebigen Teilmengen $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$, so sind M und M' bereits elementar äquivalent.*

Bemerkung: Sei $\underline{a} := (a_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ eine Aufzählung von A (für eine Ordinzahlzahl γ und $\underline{a}' := f(\underline{a})$ (also $a'_\alpha := f(a_\alpha)$ für alle $\alpha < \gamma$). Die Abbildung f ist elementar genau dann, wenn $\operatorname{tp}(\underline{a}/\emptyset) = \operatorname{tp}(\underline{a}'/\emptyset)$.

Definition 1.2.5 *Sei $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ L-Strukturen und sei $f\colon A \to A'$ eine elementare Abbildung zwischen Teilmengen $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$. Sei außerdem $\Sigma(\underline{x})$ ein partieller Typ über A. Dann setzen wir*

$$f(\Sigma) := \{\phi(\underline{x}, f(\underline{a})) \mid \phi(\underline{x}, \underline{a}) \in \Sigma\}.$$

Bemerkung 1.2.6 $f(\Sigma)$ *ist wieder ein partieller Typ (d. h. konsistent). Ist p ein vollständiger Typ über A, so ist $f(p)$ ein vollständiger Typ über A'.*

Korollar 1.2.7 *Sei $\mathcal{M}$ saturiert. Dann gilt für jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit $|A| < |M|$ und jedes Paar von Tupeln $\underline{b}, \underline{b}' \in M^n$: $\operatorname{tp}(\underline{b}/A) = \operatorname{tp}(\underline{b}'/a)$ genau dann, wenn ein Automorphismus $\alpha\colon M \to M$ existiert mit $\alpha(a) = a$ für alle $a \in A$ und $\alpha(\underline{b}) = \underline{b}'$.*

1.3 Die Typen als topologischer Raum

Definition 1.3.1 *Sei T eine L-Theorie (nicht notwendigerweise vollständig) und sei $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Tupel von Variablen.*

(a) *Die Menge aller (vollständigen) Typen von T in $\underline{x}$ wird mit $S_{\underline{x}}(T)$ oder $S_n(T)$ bezeichnet; man nennt dies den* ***Typenraum****.*

(b) *Ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und $A \subseteq M$ eine Parametermenge, so wird der Raum $S_{\underline{x}}(\mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M}))$ aller Typen über A in $\underline{x}$ auch mit $S_{\underline{x}}(A)$ oder $S_n(A)$ bezeichnet.*

Notation 1.3.2 *Wir verwenden einige abkürzende Notationen für Parametermengen: Ist $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in M^n$, so ist $S_n(\underline{b})$ eine Kurzschreibweise für $S_n(\{b_1, \ldots, b_n\})$. Schreiben wir mehrere Dinge hintereinander, so ist die Vereinigung gemeint; z. B. ist $S_n(AA'\underline{b})$ (für Mengen $A, A' \subseteq M$) eine Kurzschreibweise für $S_n(A \cup A' \cup \{b_1, \ldots, b_n\})$. Die gleichen Abkürzungen werden auch für Typen über Mengen verwendet:* $\mathrm{tp}(c/\underline{b})$, $\mathrm{tp}(c/AA'\underline{b})\ldots$

Definition 1.3.3 *Eine Teilmenge von $S_{\underline{x}}(T)$ heißt* ***abgeschlossen****, wenn sie die Form*

$$X_\Sigma := \{p(\underline{x}) \in S_{\underline{x}}(T) \mid \Sigma \subseteq p\},$$

hat für eine Menge Σ von L-Formeln in $\underline{x}$.

Bemerkung 1.3.4 *Für partielle Typen $\Sigma(\underline{x}), \Sigma'(\underline{x})$ gilt: $\Sigma \models \Sigma'$ genau dann, wenn $X_\Sigma \subseteq X_{\Sigma'}$. Insbesondere sind zwei Formeln $\phi(\underline{x})$ und $\phi'(\underline{x})$ äquivalent modulo T genau dann, wenn $X_{\{\phi\}} = X_{\{\phi'\}}$ ist.*

Lemma 1.3.5 *Mit der obigen Definition von abgeschlossenen Mengen wird $S_{\underline{x}}(T)$ zu einem kompakten, Hausdorffschen topologischen Raum.*

Lemma 1.3.6 *Eine Teilmenge von $S_{\underline{x}}(T)$ ist offen und abgeschlossen („abgeschlof-fen“) genau dann, wenn sie die Form $X_{\{\phi\}}$ hat, für eine L-Formel $\phi(\underline{x})$. Diese Mengen bilden eine Basis der Topologie von $S_{\underline{x}}(T)$.*

Definition 1.3.7 *Ein partieller Typ $\Sigma(\underline{x})$ heißt* ***isoliert****, wenn er von einem partiellen Typ impliziert wird, der aus einer einzigen Formel $\phi(\underline{x})$ besteht. Man sagt auch „ϕ* ***isoliert*** *Σ”.*

Bemerkung 1.3.8 *Ein vollständiger Typ p von einer Formel ϕ isoliert genau dann, wenn $\phi \in p$ ist und $\phi \models p$.*

Lemma 1.3.9 *Ein Typ $p \in S_{\underline{x}}(T)$ ist isoliert genau dann, wenn er als Punkt des topologischen Raums $S_{\underline{x}}(T)$ isoliert ist, d. h. wenn die Menge $\{p\}$ offen ist.*

Lemma 1.3.10 *Ist T vollständig und $p \in S_{\underline{x}}(T)$ isoliert, so ist p in jedem Modell von T realisiert. Insbesondere ist für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ und jede Teilmenge $A \subseteq M$ jeder isolierte Typ über A bereits in $\mathcal{M}$ realisiert.*

Lemma 1.3.11 *Hat eine Theorie T unendlich viele n-Typen, so hat sie insbesondere auch nicht-isolierte n-Typen.*

1.4 Der Satz von Ryll-Nardzewski

Definition 1.4.1 *Sei T eine Theorie und $\kappa \geq \aleph_0$ eine Kardinalzahl. T heißt κ-katerogisch, wenn T bis auf Isomorphie genau ein Modell der Kardinalität κ hat.*

Beispiel 1.4.2

- *Sei $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$. Die Theorie ACF_p der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p ist κ-kategorisch für jedes $\kappa \geq \aleph_1$ aber nicht $\aleph_0$-kategorisch.*
- *Ist K ein Körper, so ist die $L_{K\text{-VR}}$-Theorie der K-Vektorräume κ-kategorisch für jedes $\kappa > |K|$.*
- *Die Theorie DLO der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte ist $\aleph_0$-kategorisch aber nicht κ-kategorisch für jedes $\kappa \geq \aleph_1$*

Satz 1.4.3 („omitting types“) *Sei L eine höchstens abzählbare Sprache, sei T eine L-Theorie und sei $\Sigma(\underline{x})$ ein nicht-isolierter partieller Typ. Dann existiert ein Modell $\mathcal{M} \models T$, in dem Σ nicht realisiert ist.*

Satz 1.4.4 (Ryll-Nardzewski) *Sei L eine höchstens abzählbare Sprache und sei T eine vollständige L-Theorie. Dann sind äquivalent:*

(a) *T ist $\aleph_0$-kategorisch.*
(b) *Jedes abzählbare Modell von T ist saturiert.*
(c) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Äquivalenz modulo T nur endlich viele L-Formeln $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.*
(d) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $S_n(T)$ endlich.*

Bemerkung 1.4.5 *Es gilt allgemeiner, für vollständige Theorien T in abzählbaren Sprachen L : Ist $\kappa \geq \aleph_0$ beliebig, so ist T κ-kategorisch genau dann, wenn jedes Modell von T der Kardinalität κ saturiert ist.*

Bemerkung 1.4.6 *Ist T wie in Satz 1.4.4 und $\mathcal{M} \models T$ ein abzählbares Modell, so kann man die gesamte Modelltheorie an $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ ablesen:*

(a) *Zwei Tupel $\underline{a}, \underline{b} \in M^n$ haben den gleichen Typ genau dann, wenn ein Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ existiert, der $\underline{a}$ auf $\underline{b}$ abbildet. (Strukturen mit dieser Eigenschaft nennt man **ultrahomogen**.)*
(b) *Eine Teilmenge $X \subseteq M^n$ ist L-definierbar genau dann, wenn für jeden Autormophismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ gilt: $\alpha(X) = X$.*

2 Dimension und Rang

2.1 Der modelltheoretische algebraische Abschluss

Sei L eine Sprache und $\mathcal{M}$ eine L-Struktur.

Definition 2.1.1 *Der **definierbare Abschluss** einer Menge $A \subseteq M$ ist die Menge aller A-definierbaren Elemente von M; Notation dafür:* $\mathrm{dcl}(A)$ *oder* $\mathrm{dcl}_L(A)$.

Beispiel 2.1.2 (a) *Ist V ein K-Vektorraum (als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur) und $A \subseteq V$, so ist* $\mathrm{dcl}(A) = \langle A \rangle_K$.

(b) *Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* 0 *(als L_{ring}-Struktur) und $A \subseteq K$, so ist* $\mathrm{dcl}(A) = \mathbb{Q}(A)$.

Definition 2.1.3 *Sei $A \subseteq M$.*

(a) *Ein Element $b \in M$ heißt **algebraisch** über A, wenn eine endliche, A-definierbare Menge $X \subseteq M$ existiert, die b enthält.*
(b) *Der **algebraische Abschluss** von A ist die Menge aller über A algebraischen Elemente von M; Notation dafür:* $\mathrm{acl}(A)$ *oder* $\mathrm{acl}_L(A)$.
(c) *Ein Typ $p \in S_1(A)$ heißt **algebraisch**, wenn er eine $L(A)$-Formel $\phi(x)$ enthält, die eine endliche Menge definiert.*

Beispiel 2.1.4 (a) *Ist V ein K-Vektorraum und $A \subseteq V$, so ist* $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{dcl}(A)$.

(b) *Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \subseteq K$, so ist* $\mathrm{acl}(A)$ *der algebraische Abschluss des Körpers* $\mathrm{dcl}(A)$.

Bemerkung 2.1.5 *Algebraische Typen sind isoliert, aber nicht jeder isolierte Typ ist algebraisch.*

Bemerkung 2.1.6 *Ist $M \prec M'$, so gilt (in $\mathcal{M}'$): $M = \mathrm{acl}(M)$.*

Bemerkung 2.1.7 *Ist $p \in S_1(A)$ ein isolierter Typ, so gilt:*

(a) *Ist p algebraisch, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass p in jedem Modell $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ genau n Realisierungen hat.*
(b) *Ist p nicht-algebraisch, so hat p in jedem Modell $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ unendlich viele Realisierungen.*

Lemma 2.1.8 *Für $A, B \subseteq M$ gilt:*

(a) $A \subseteq \mathrm{acl}(A)$
(b) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$
(c) $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$

(d) $\operatorname{acl}(A) = \bigcup_{\substack{A_0 \subseteq A \\ A_0 \text{ endl.}}} \operatorname{acl}(A_0)$

Definition 2.1.9 *Sei T eine vollständige L-Theorie. Man sagt „*acl *hat die* ***Austauscheigenschaft*** *(in T)", wenn für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ gilt: Sind $A \subseteq M$ und $b, c \in M$ mit $c \in \operatorname{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \operatorname{acl}(A)$, so ist $b \in \operatorname{acl}(A \cup \{c\})$.*

Beispiel 2.1.10 *In den Theorien der folgenden Strukturen hat* acl *die Austauscheigenschaft:*

(a) *K-Vektorräume, in der Sprache L_{RV}*
(b) *algebraisch abgeschlossene Körper, in der Ring-Sprache*
(c) *$\mathbb{R}$ in der Sprache der Ringe oder der angeordneten Ringe; und allgemeiner: jede o-minimale Struktur*
(d) *$\mathbb{Q}$ in der Sprache der Gruppen oder der angeordneten Gruppen*
(e) *$\mathbb{Z}$ in der Sprache der Gruppen oder der angeordneten Gruppen*
($\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ hat Quantoren-Elimination in den Sprachen $L_1 = \{0, +, -\} \cup \{P_k \mid k \geq 2\}$ und $L_2 = \{0, 1, +, -, <\} \cup \{P_k \mid k \geq 2\}$, wobei P_k ein Prädikat für $k\mathbb{Z}$ ist.)

Für den Rest von Abschnitt 2.1 nehmen wir an, dass acl die Austauscheigenschaft in $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ hat.

Definition 2.1.11 (a) *Eine Menge $A \subseteq M$ heißt* ***algebraisch unabhängig****, wenn für alle $a \in A$ gilt: $a \notin \operatorname{acl}(A \setminus \{a\})$.*
(b) *Eine Menge $A \subseteq M$ heißt* ***algebraisch abgeschlossen****, wenn* $\operatorname{acl} A = A$ *gilt.*
(c) *Eine* ***Basis*** *einer algebraisch abgeschlossenen Menge $A \subseteq M$ ist eine algebraisch unabhängige Menge $B \subseteq A$ mit $\operatorname{acl}(B) = A$.*

Lemma 2.1.12 *Ist $A \subseteq M$ algebraisch unabhängig und $b \in M \setminus \operatorname{acl}(A)$, so ist auch $A \cup \{b\}$ algebraisch unabhängig.*

Satz 2.1.13 *Sei $A \subseteq M$ algebraisch abgeschlossen. Ist $B \subseteq M$ algebraisch unabhängig, so existiert eine Basis B' von A mit $B \subseteq B'$. Insbesondere besitzt A (mindestens) eine Basis.*

Satz 2.1.14 *Sei $A \subseteq M$ algebraisch abgeschlossen. Alle Basen von A haben die gleiche Kardinalität.*

Definition 2.1.15 *Die* ***Dimension*** $\dim A$ *einer algebraisch abgeschlossenen Menge $A \subseteq M$ ist die Kardinalität einer (beliebigen) Basis von A.*

Beispiel 2.1.16 *Für Untervektorräume $U \subseteq V$ eines K-Vektorraums V (als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur) ist die Dimension von U im Sinne von Definition 2.1.15 die normale Dimension im Sinne der linearen Algebra.*

Definition 2.1.17 *Der **Transzendenzgrad** $\operatorname{trdeg} K$ eines Körper K ist die Dimension von K^{alg}, als $\mathrm{L}_{\mathrm{ring}}$-Struktur. Eine **Transzendenzbasis** von K ist eine Basis $B \subseteq K$ von K^{alg}.*

Bemerkung: Transzendenzbasen existieren. Allgemeiner gilt, für $A \subseteq M$ beliebig: Es gibt eine Basis von $\operatorname{acl}(A)$, die in A liegt.

Lemma 2.1.18 *Für $A \subseteq M$ gilt: $|\operatorname{acl}(A)| \leq \max\{|A|, |L|, \aleph_0\}$. Insbesondere gilt für algebraisch abgeschlossene A mit $|A| > \max\{|L|, \aleph_0\}$: $\dim A = |A|$.*

Lemma 2.1.19 *Sei $A \subseteq M$. Wenn acl_L die Austauscheigenschaft hat (in $\operatorname{Th}_L(\mathcal{M})$), so hat auch $\operatorname{acl}_{L(A)}$ die Austauscheigenschaft (in $\operatorname{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$).*

Definition 2.1.20 *Ist $A \subseteq M$, so meinen wir bei den Betriffen „algebraisch unabhängig“, „Basis“, „Dimension“ mit „**über** A“, dass wir in der Sprache $L(A)$ arbeiten. Die Dimension über A einer Menge $B = \operatorname{acl}_{L(A)}(B) \subseteq M$ wird auch als „**relative Dimension** über A“ bezeichnet, und die Notation dafür ist $\dim_A(B)$ (oder $\dim_{L(A)}(B)$).*

Bemerkung 2.1.21 *Für all die obigen Begriffe macht es keinen Unterschied, ob wir über einer Menge $A \subseteq M$ oder über $\operatorname{acl}(A)$ arbeiten. (Z. B. gilt, für $B \subseteq M$ algebraisch abgeschlossen über A: $\dim_A(B) = \dim_{\operatorname{acl}(A)}(B)$.)*

Lemma 2.1.22 *Seien $A \subseteq B \subseteq M$ algebraisch abgeschlossen. Dann gilt: $\dim B = \dim A + \dim_A B$.*

Definition 2.1.23 *Seien $K_1 \subseteq K_2$ Körper. Wir fassen beide Körper als Teilmengen der L_{ring}-Struktur K_2^{alg} auf. Der **Transzendenzgrad** $\operatorname{trdeg}(K_2/K_1)$ von K_2 über K_1 ist die relative Dimension (im Sinne von Definition 2.1.20) von K_2^{alg} über K_1. Eine **Transzendenzbasis** von K_2 über K_1 ist eine Basis $B \subseteq K_2$ von K_2^{alg} über K_1.*

2.2 Streng minimale Strukturen

Definition 2.2.1 (a) *Eine vollständige Theorie T, deren Modelle unendlich sind, heißt **streng minimal**, wenn für alle Modelle $\mathcal{M} \models T$ gilt: Jede definierbare Teilmenge $X \subseteq M$ ist entweder endlich oder ko-endlich.*

(b) *Eine unendliche Struktur $\mathcal{M}$ heißt **streng minimal**, wenn $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ streng minimal ist.*

Bemerkung 2.2.2 *Ist $\mathcal{M}$ eine streng minimale L-Struktur und $A \subseteq M$, so ist $\mathcal{M}$ auch als $L(A)$-Struktur streng minimal.*

Beispiel 2.2.3 *Die folgenden Strukturen sind streng minimal:*

(a) *jede unendliche Menge, in der leeren Sprache*
(b) *jeder unendliche K-Vektorraum, als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur (für jeden Körper K)*
(c) *jeder algebraisch abgeschlossene Körper, als L_{ring}-Struktur.*

Lemma 2.2.4 *Sei $\mathcal{M}$ streng minimal und sei $\underline{b} \in M^n$ ein Tupel mit $b_i \notin \mathrm{acl}(b_1, \dots, b_{i-1})$ für $i = 1, \dots n$. Sei außerdem $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und $\underline{b}' \in (M')^n$ ein Tupel, das die analoge Bedingung zu $\underline{b}$ erfüllt. Dann ist $\mathrm{tp}(\underline{b}/\emptyset) = \mathrm{tp}(\underline{b}'/\emptyset)$.*

Satz 2.2.5 *Ist $\mathcal{M}$ streng minimal, so hat acl die Austauscheigenschaft (in $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$).*

Korollar 2.2.6 *Sei $\mathcal{M}$ streng minimal und $A \subseteq M$. Dann besteht $S_1(A)$ genau aus:*

- *allen algebraischen 1-Typen über A*
- *genau einem nicht-algebraischen Typ über A.*

Insbesondere: Falls $|M| > \max\{|L|, \aleph_0\}$ ist, ist $\mathcal{M}$ vollständig saturiert.

Korollar 2.2.7 *Sei $\mathcal{M}$ streng minimal. Sind $\underline{a}, \underline{a}' \in M^\alpha$ zwei Tupel gleicher Länge (für $\alpha \in \mathrm{On}$), die beide (einzeln) algebraisch unabhängig sind, so ist $\mathrm{tp}(\underline{a}/\emptyset) = \mathrm{tp}(\underline{a}'/\emptyset)$.*

Satz 2.2.8 *Ist $\mathcal{M}$ streng minimal, so gilt für Teilmengen $A \subseteq M$: A ist eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{M}$ genau dann, wenn A algebraisch abgeschlossen und unendlich ist.*

Satz 2.2.9 *Sei T streng minimal. Dann existiert eine Kardinalzahl $\kappa \leq \aleph_0$, so dass die Modelle von T genau die folgenden sind: Für jedes $\mu \geq \kappa$ existiert (bis auf Isomorphie) genau ein Modell der Dimension μ.*

Lemma 2.2.10 *Ist $f\colon A \to A'$ eine elementare Bijektion zwischen Teilmengen $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$ von L-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$, so lässt sich f zu einer elementaren Bijektion von $\mathrm{acl}(A)$ nach $\mathrm{acl}(A')$ fortsetzen.*

Korollar 2.2.11 *Sei T streng minimal, so ist T κ-kategorisch für jedes $\kappa > \max\{|L|, \aleph_0\}$.*

Beispiel (ohne Beweis): $((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\aleph_0}, +)$ ist $\aleph_1$-kategorisch aber nicht streng minimal.

2.3 Der acl-Rang von definierbaren Mengen

In diesem Abschnitt fixieren wir eine vollständige Theorie T mit unendlichen Modellen, und wir nehmen bis auf weiteres an, dass acl in T die Austauscheigenschaft besitzt.

Definition 2.3.1 *Sei $X := \phi(\mathcal{M}) \subseteq M^n$ eine A-definierbare Menge für eine Teilmenge $A \subseteq M$. Der* ***Rang*** *(oder „acl-Rang“) von X ist definiert als*

$$\operatorname{rk}(X) := \max_{\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}} \max_{\underline{b} \in \phi(\mathcal{M}')} \dim_A \operatorname{acl}_A(\underline{b}).$$

Ein solches $\underline{b}$ nennen wir einen ***Zeugen*** *des Rangs von X. Wir setzen $\operatorname{rk} \emptyset := -\infty$.*

Wenn wir betonen wollen, dass die Definition von $\operatorname{rk} X$ auch von der Menge A abhängt, sagen wir „Rang von X über A“.

Satz 2.3.2 *Sei $X = \phi(\mathcal{M}) \subseteq M^n$ eine A-definierbare Menge, für eine Teilmenge $A \subseteq M$. Dann kann der Rang von X über A in jeder $|A|^+$-saturierten elementaren Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ berechnet werden, d. h. es existiert ein $\underline{b} \in \phi(\mathcal{M}')$ mit $\operatorname{rk}(X) = \dim_A \operatorname{acl}_A(\underline{b})$.*

Satz 2.3.3 *Der Rang einer definierbaren Menge $X \subseteq M^n$ hängt nur von der Menge X selbst ab, und nicht von der Menge A. (Also genauer: Ist X sowohl A- als auch A'-definierbar, so ist der Rang von X über A gleich dem Rang von X über A'.)*

Lemma 2.3.4 *(In diesem Lemma nehmen wir nicht an, dass acl die Austauscheigenschaft in $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ hat.) Sei $A \subseteq M$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{M}$ $|A|^+$-saturiert ist. Dann gibt es in jeder unendlichen definierbaren Menge $X \subseteq M$ Elemente, die nicht algebraisch über A sind.*

Satz 2.3.5 *Seien $X, X' \subseteq M^m$ und $Y \subseteq M^n$ definierbare Mengen. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{rk}(X) = 0$ *genau dann, wenn X endlich aber nicht leer ist.*
(b) $\operatorname{rk}(M) = 1$.
(c) $\operatorname{rk}(X \cup X') = \max\{\operatorname{rk}(X), \operatorname{rk}(X')\}$.
Insbesondere: $X \subseteq X' \Rightarrow \operatorname{rk}(X) \leq \operatorname{rk}(X')$.
(d) *Wir nehmen an, dass M $\aleph_0$-saturiert ist. Für $\diamond \in \{\leq, =, \geq\}$: Ist $r \in \mathbb{N}$ und ist $f\colon X \to Y$ eine definierbare Abbildung, so dass $\operatorname{rk}(f^{-1}(\underline{b})) \diamond r$ gilt für jedes $\underline{b} \in Y$, so ist $\operatorname{rk}(X) \diamond r + \operatorname{rk}(Y)$.*
Insbesondere gilt $\operatorname{rk}(X \times Y) = \operatorname{rk}(X) + \operatorname{rk}(Y)$, und wenn eine definierbare Bijektion $f\colon X \to Y$ existiert, so ist $\operatorname{rk}(X) = \operatorname{rk}(Y)$.

Bemerkung 2.3.6 *Ist $f\colon X \to Y$ eine definierbare Abbildung, so dass alle Fasern $f^{-1}(\underline{b})$ den gleichen Rang haben (für $\underline{b} \in Y$), so gilt: Ein Element $\underline{a} \in X$ ist Zeuge für den Rang von X genau dann, wenn $\underline{b} := f(\underline{a})$ ein Zeuge für den Rang von Y ist und $\underline{a}$ ein Zeuge für den Rang der Faser $f^{-1}(\underline{b})$.*

Wir hören jetzt wieder auf anzunehmen, dass acl in T die Austauscheigenschaft besitzt.

Definition 2.3.7 *Eine L-Theorie T **„eliminiert $\exists^\infty$"**, wenn zu jeder L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ eine L-Formel $\psi(\underline{y})$ existiert, so dass für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jedes Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \psi(\underline{b})$ genau dann, wenn unendlich viele $a \in M$ existieren mit $\mathcal{M} \models \phi(a, \underline{b})$.*

Lemma 2.3.8 *Eine Theorie T eliminiert $\exists^\infty$ genau dann, wenn für jede L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ eine natürliche Zahl N existiert, so dass für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jedes Tupel $\underline{b} \in \mathcal{M}^n$ gilt: Entweder $\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ ist unendlich oder $|\phi(M, \underline{b})| \leq N$.*

Beispiel 2.3.9 *Die folgenden Theorien eliminieren $\exists^\infty$:*

(a) *$\aleph_0$-kategorische Theorien*
(b) *streng minimale Theorien*
(c) *o-minimale Theorien*

Satz 2.3.10 *Ist T eine Theorie, in der* acl *die Austauscheigenschaft besitzt und die außerdem $\exists^\infty$ eliminiert, so „ist der Rang definierbar" im folgenden Sinn: Für jede Formel L-Formel $\phi(x_1, \dots, x_n, \underline{y})$ existieren Formeln $\psi_{-\infty}(\underline{y}), \psi_0(\underline{y}), \dots, \psi_n(\underline{y})$, so dass für alle $\underline{b}$ gilt:* $\mathrm{rk}(\phi(\mathcal{M}, \underline{b})) = d$ *genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \psi_d(\underline{b})$ gilt.*

Korollar 2.3.11 *Ist $\mathcal{M}$ o-minimal, so ist der obige Rang einer definierbaren Menge $X \subseteq M^n$ gleich der Dimension von X im Sinne des letzten Semesters.*

2.4 Algebraisch abgeschlossene Körper

In diesem Abschitt sei k immer ein Körper und K ein $\max\{|k|^+, \aleph_0\}$-saturierter algebraisch abgeschlossener Körper, der k enthält. Wir arbeiten in der Sprache $L = L_{\mathrm{ring}}(k)$.

Definition 2.4.1 *Sei $F \subseteq k[\underline{x}]$ eine beliebige Menge von Polynomen. Wir definieren $V(F) := \{\underline{a} \in K^n \mid \forall f \in F \colon f(\underline{a}) = 0\}$. Teilmengen von K^n der Form $V(F)$ nennt man **algebraisch** (über k) oder auch **Zariski-abgeschlossen** (über k).*

Bemerkung 2.4.2 *Ist $I = (F) \triangleleft k[\underline{x}]$ das von F erzeugte Ideal, so ist $V(I) = V(F)$. Insbesondere hängt $V(F)$ nur davon ab, welches Ideal F erzeugt.*

Bemerkung 2.4.3 *Die Zariski-abgeschlossenen Mengen machen K^n zu einem topologischen Raum. Man nennt dies die **Zariski-Topologie** (über k). Den Abschluss einer Menge $Y \subseteq K^n$ bezüglich der Zariski-Topologie nennt man den **Zariski-Abschluss** Y^{Zar} von Y.*

Im Folgenden werden wir immer über k arbeiten und dies deshalb nicht jedes Mal erwähnen.

Definition 2.4.4 *Für $Y \subseteq K^n$ beliebig setzt man $I(Y) := \{f \in k[\underline{x}] \mid \forall \underline{a} \in Y : f(\underline{a}) = 0\}$.*

Bemerkung 2.4.5 *Für $Y \subseteq K^n$ beliebig gilt: $I(Y)$ ist ein Ideal, und $V(I(Y)) = Y^{\mathrm{Zar}}$.*

Im folgenden sind alle Ringe kommutativ und mit 1.

Definition 2.4.6 *Ein Ring R heißt **noethersch**, wenn keine unendliche aufsteigende Kette von Idealen $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$ in R existiert.*

Lemma 2.4.7 *In einem noetherschen Ring ist jedes Ideal I endlich erzeugt, d. h. es existieren (endlich viele) $a_1, \dots, a_n \in R$ so dass $I = (a_1, \dots, a_n)$ ist.*

Satz 2.4.8 (Hilberts Basis-Satz) *Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch $R[x]$ noethersch. Insbesondere ist $k[\underline{x}]$ noethersch.*

Korollar 2.4.9 *Jede algebraische Menge kann durch endlich viele Polynome definiert werden. Insbesondere sind partielle Typen, die nur aus polynomialen Gleichungen bestehen, isoliert.*

Definition 2.4.10 *Sei R ein Ring. Ein Ideal $I \triangleleft R$ heißt **Radikal-Ideal**, wenn für alle $g \in R$ gilt: Ist $g^n \in I$ für ein $n \geq 2$, so ist bereits $g \in I$.*

Bemerkung 2.4.11 *Für $Y \subseteq K^n$ beliebig ist $I(Y)$ ein Radikalideal.*

Satz 2.4.12 *Es gibt eine Bijektion zwischen den algebraischen Teilmengen von K^n und den Radikal-Idealen in $k[\underline{x}]$, die gegeben ist durch $X \mapsto I(X)$. Das Inverse dieser Abbildung ist $I \mapsto V(I)$.*

Satz 2.4.13 (Hilberts Nullstellensatz) *Ist $I \subseteq k[\underline{x}]$ ein Ideal und ist $g \in k[\underline{x}]$ ein Polynom, so dass $g^n \notin I$ ist für alle $n \geq 1$, so ist $V(I \cup \{g\}) \subsetneq V(I)$.*

Lemma 2.4.14 *Für $\underline{a}, \underline{a}' \in K^n$ gilt: $\mathrm{tp}(\underline{a}/k) = \mathrm{tp}(\underline{a}'/k)$ genau dann, wenn $\{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}} = \{\underline{a}'\}^{\mathrm{Zar}}$. Insbesondere:*

(a) *Ist $p \in S_n(k)$ ein Typ und $\underline{a}$ eine beliebige Realisierung davon, so ist der Zariski-Abschluss der Realisierungsmenge von p gleich dem Zariski-Abschluss $\{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}}$.*

(b) *Die Abbildung, die einem Typ $p \in S_n(k)$ den obigen Zariski-Abschluss zuordnet, ist injektiv.*

Definition 2.4.15 (a) *Sei R ein Ring. Ein Ideal $I \triangleleft R$ heißt **Prim-Ideal**, wenn $I \neq R$ ist und wenn für alle $g, h \in R$ gilt: Aus $g \cdot h \in I$ folgt $g \in I$ oder $h \in I$.*

(b) *Eine algebraische Menge $X \subseteq K^n$ heißt **irreduzibel** (über k), wenn sie nicht leer ist und wenn für alle über k algebraischen Teilmengen $Y_1, Y_2 \subseteq X$ gilt: Falls $Y_1 \cup Y_2 = X$, so ist schon $Y_1 = X$ oder $Y_2 = X$.*

Bemerkung 2.4.16 *Prim-Ideale sind Radikal-Ideale.*

Lemma 2.4.17 *Eine algebraische Menge $X \subseteq K^n$ ist irreduzibel genau dann, wenn das zugehörige Ideal $I(X)$ ein Prim-Ideal ist.*

Satz 2.4.18 *Jede algebraische Menge $X \subseteq K^n$ lässt sich als Vereinigung von endlich vielen irreduziblen algebraischen Mengen $Y_1, \dots, Y_\ell$ schreiben. Fordert man zusätzlich, dass keine dieser Mengen Teilmenge einer anderen ist (also $Y_i \not\subseteq Y_j$ für alle $i \neq j$), so sind die Y_i durch X eindeutig festgelegt (bis auf Reihenfolge).*

Definition 2.4.19 *Die Mengen Y_i aus Satz 2.4.18 nennt man die **irreduziblen Komponenten** von X.*

Satz 2.4.20 *Die Abbildung, die jedem Typ $p \in S_n(k)$ den Zariski-Abschluss der Realisierungsmenge von p zuordnet, ist eine Bijektion von $S_n(k)$ zur Menge der irreduziblen algebraischen Mengen.*

Bemerkung 2.4.21 *Wir haben also die folgenden Beziehungen:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \{\textit{alg. Teilmengen von } K^n\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\textit{Radikalideale in } k[\underline{x}]\} \\
 & & \cup & & \cup \\
S_n(k) & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\textit{irred. alg. Teilmengen von } K^n\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\textit{Primideale in } k[\underline{x}]\} \\
 & & || & & || \\
 & & \{\{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}} \mid \underline{a} \in K^n\} & & \{I(\{\underline{a}\}) \mid \underline{a} \in K^n\}
\end{array}$$

Definition 2.4.22 *Sei $X \subseteq K^n$ eine irreduzible algebraische Menge. Ein **generisches Element** von X (über k) ist ein $\underline{a} \in X$ mit $X = \{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}}$. Man sagt auch: $\underline{a}$ ist **generisch in** X. Den Typ $\mathrm{tp}(\underline{a}/k)$ eines solchen generischen Elements nennt man auch den **generischen Typ** von X (über k).*

Lemma 2.4.23 *Für beliebige $\underline{a} \in K^n$ gilt: $\dim_k \mathrm{acl}_k(\underline{a}) = \mathrm{rk}(\{\underline{a}\}^{\mathrm{Zar}})$. Anders ausgedrückt: Jedes generische Element einer irreduziblen algebraischen Menge $X \subseteq K^n$ ist ein Zeuge für den Rang von X.*

Satz 2.4.24 *Seien $X \subsetneq Y \subseteq K^n$ algebraische Mengen mit Y irreduzibel. Dann ist $\mathrm{rk}\, X < \mathrm{rk}\, Y$.*

Lemma 2.4.25 *Sei $X \subseteq K^n$ irreduzibel und seien $f_1, \dots, f_m \in k[\underline{x}]$ Polynome. Wir fassen $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m)$ als Abbildung von K^n nach K^m auf. Dann gilt für beliebige generische Elemente $\underline{a} \in X$: $\{\underline{f}(X)\}^{\mathrm{Zar}} = \{\underline{f}(\underline{a})\}^{\mathrm{Zar}}$.*

Korollar 2.4.26 *Sei $X \subseteq K^n$ irreduzibel. Dann sind die generischen Elemente von X genau die Zeugen für den Rang von X.*

Korollar 2.4.27 *Der Rang einer nicht-leeren algebraischen Menge $X \subseteq K^n$ ist das größte d, so dass irreduzible algebraische Mengen $\emptyset \subsetneq Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_d \subseteq X$ existieren. (Es gilt dann $\operatorname{rk} Y_i = i$.)*

Korollar 2.4.28 *Für k-definierbare Mengen $X \subseteq K^n$ gilt: $\operatorname{rk}(X^{\mathrm{Zar}}) = \operatorname{rk}(X)$ und $\operatorname{rk}(X^{\mathrm{Zar}} \setminus X) < \operatorname{rk}(X)$.*

2.5 Der Morley-Rang

In diesem Abschnitt ist $\mathcal{M}$ eine beliebige unendliche L-Struktur.

Definition 2.5.1 *Wir nehmen an, dass $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturiert ist; ist dies nicht der Fall, gehen wir zunächst zu einer $\aleph_0$-saturierten elementaren Erweiterung über. Der* ***Morley-Rang*** *ist die (eindeutige) Funktion, die jeder definierbaren Teilmenge $X \subseteq M^n$ ein $\mathrm{MR}(X) \in \mathrm{On} \cup \{\pm\infty\}$ zuordnet mit der folgenden Eigenschaft:*

(a) $\mathrm{MR}(X) \geq 0$ *genau dann, wenn X nicht leer ist.*
(b) *Für jede Ordinalzahl β: $\mathrm{MR}(X) \geq \beta + 1$ genau dann, wenn unendlich viele disjunkte definierbare Teilmengen $X_i \subseteq X$ existieren mit $\mathrm{MR}(X_i) \geq \beta$.*
(c) *Für Limes-Ordinalzahlen λ: $\mathrm{MR}(X) \geq \lambda$ genau dann, wenn $\mathrm{MR}(X) \geq \beta$ für alle $\beta < \lambda$.*

Ist $X = \phi(M)$ (für eine Formel $\phi(\underline{x})$), so scheiben wir statt $\mathrm{MR}(X)$ auch $\mathrm{MR}(\phi)$.

Bemerkung 2.5.2 *Wir erhalten also:*

(a) $\mathrm{MR}(X) = -\infty$ *genau dann, wenn X leer ist.*
(b) *Für $\alpha \in \mathrm{On}$: $\mathrm{MR}(X) = \alpha$ genau dann, wenn (nach Definition 2.5.1) $\mathrm{MR}(X) \geq \alpha$ aber nicht $\mathrm{MR}(X) \geq \alpha + 1$ gilt.*
(c) $\mathrm{MR}(X) = \infty$ *genau dann, wenn $\mathrm{MR}(X) \geq \alpha$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt.*

Bemerkung 2.5.3 *Der Morley-Rang hängt nicht vom Modell ab, in dem man ihn berechnet: Ist $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel, und sind $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ beide $\aleph_0$-saturiert, so ist $\mathrm{MR}(\phi(\mathcal{M})) = \mathrm{MR}(\phi(\mathcal{M}'))$.*

Für den Rest dieses Abschnitts nehmen wir an, dass $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturiert ist.

Bemerkung 2.5.4 *Sind X und Y definierbare Mengen und ist $f\colon X \to Y$ eine definierbare Bijektion, so ist $\mathrm{MR}(X) = \mathrm{MR}(Y)$.*

Bemerkung 2.5.5 *Für definierbare Menge $X, X' \subseteq M^m$ gilt: $\mathrm{MR}(X \cup X') = \max\{\mathrm{MR}(X), \mathrm{MR}(X')\}$. Insbesondere folgt aus $X \subseteq X'$, dass $\mathrm{MR}(X) \leq \mathrm{MR}(X')$ ist.*

Satz 2.5.6 *Hat* acl *in* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *die Austauscheigenschaft (so dass der* acl*-Rang definiert ist), so gilt für jede definierbare Menge* $X \subseteq M^n$*:* $\mathrm{MR}(X) \geq \mathrm{rk}(X)$*. Ist* $\mathcal{M}$ *streng minimal, so ist* $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{MR}(X)$*.*

Definition 2.5.7 *Sei* α *eine Ordinalzahl. Eine definierbare Menge* X *heißt* α*-streng-minimal, wenn* $\mathrm{MR}(X) = \alpha$ *ist und wenn keine definierbare Teilmenge* $Y \subseteq X$ *existiert mit* $\mathrm{MR}(Y) = \alpha$ *und* $\mathrm{MR}(X \setminus Y) = \alpha$*.*

Bemerkung 2.5.8 *Eine Struktur* $\mathcal{M}$ *ist streng minimal genau dann, wenn* M *(als definierbare Menge)* 1*-streng-minimal ist.*

Satz 2.5.9 *Ist* X *eine definierbare Menge mit Morley-Rang* $\alpha \in \mathrm{On}$*, so lässt sich* X *in endlich viele disjunkte definierbare Teilmengen* $Y_1, \ldots, Y_d$ *zerlegen, die alle* α*-streng-minimal sind. Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Mengen kleineren Morley-Rangs, d. h. ist* $Y'_1, \ldots, Y'_{d'}$ *eine weitere solche Zerlegung von* X*, so ist* $d' = d$*, und nach Umnummerierung gilt* $\mathrm{rk}(Y_i \setminus Y'_i) < \alpha$ *und* $\mathrm{rk}(Y'_i \setminus Y_i) < \alpha$*.*

Definition 2.5.10 *Das* d *aus Satz 2.5.9 nennt man den* ***Morley-Grad*** *von* X*; Notation dafür:* $\mathrm{MD}(X)$*. Ist* $X = \phi(M)$*, so setzen wir auch wieder* $\mathrm{MD}(\phi) := \mathrm{MD}(X)$*.*

Bemerkung 2.5.11 *Sind* $X, Y \subseteq M^n$ *disjunkte definierbare Mengen, so gilt:*

(a) *Ist* $\mathrm{MR}(X) > \mathrm{MR}(Y)$*, so ist* $\mathrm{MD}(X \cup Y) = \mathrm{MD}(X)$*.*
(b) *Ist* $\mathrm{MR}(X) = \mathrm{MR}(Y)$*, so ist* $\mathrm{MD}(X \cup Y) = \mathrm{MD}(X) + \mathrm{MD}(Y)$*.*

Bemerkung 2.5.12 *Ist* K *ein algebraisch abgeschlossener Körper* K *und* $X \subseteq K^n$ *algebraisch über einem Unterkörper* $k \subseteq K$*, so ist* $\mathrm{MD}(X)$ *die Anzahl der über* k^{alg} *irreduziblen Komponenten von* X*, die die gleiche Dimension wie* X *haben.*

Definition 2.5.13 *Sei* $A \subseteq M$ *und* $\alpha \in \mathrm{On}$*. Eine* A*-definierbare Menge* X *heißt* ***α-minimal über*** A*, wenn* $\mathrm{MR}(X) = \alpha$ *ist und wenn für jede* A*-definierbare Teilmenge* $Y \subseteq X$ *gilt:* $\mathrm{MR}(Y) < \alpha$ *oder* $\mathrm{MR}(X \setminus Y) < \alpha$*.*

Bemerkung 2.5.14 *Analog zu Satz 2.5.9 lässt sich jede* A*-definierbare Menge* X *mit* $\mathrm{MR}(X) = \alpha \in \mathrm{On}$ *in endlich viele* A*-definierbare Teilmengen* Y_i*, die* α*-minimal über* A *sind, zerlegen. In der Situation von Bemerkung 2.5.12 entsprechen die* Y_i *den (über* k*) irreduziblen Komponenten von* X*, die die gleiche Dimension wie* X *haben.*

Satz 2.5.15 *Ist* $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$ *eine* $\aleph_0$*-saturierte elementare Unterstruktur, so hat jede über* M_0 α*-minimale definierbare Menge (für* $\alpha \in \mathrm{On}$ *beliebig) bereits Morley-Grad* 1*.*

Lemma 2.5.16 *Sei $A \subseteq M$, sei $\alpha \in \mathrm{On}$ und sei X eine A-definierbare Menge, die α-minimal über A ist. Dann ist $\{\phi(x)\ L(A)\text{-}Fml \mid \mathrm{MR}(\phi(\mathcal{M}) \cap X) = \alpha\}$ ein vollständiger Typ über A.*

Definition 2.5.17 *Den Typ aus dem vorigen Lemma nennt man den* ***generischen Typ*** *von X über A. Realisierungen dieses generischen Typs nennt man über A* ***generische Elemente*** *von X.*

Definition 2.5.18 *Der* ***Morley-Rang*** *$\mathrm{MR}(p)$ eines Typs $p \in S_n(A)$ ist das Minimum der Morley-Ränge $\mathrm{MR}(\phi)$ für $\phi \in p$. Der* ***Morley-Grad*** *$\mathrm{MD}(p)$ von p ist das Minimum der Morley-Grade $\mathrm{MD}(\phi)$, für Formeln $\phi \in p$ mit $\mathrm{MR}(\phi) = \mathrm{MR}(p)$.*

Lemma 2.5.19 *Sei $A \subseteq M$, sei $\mathcal{M}$ $|A|^+$-saturiert, und sei $X \subseteq M^n$ A-definierbar. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{MR}(X) = \max\{\mathrm{MR}(\mathrm{tp}(\underline{b}/A) \mid \underline{b} \in X\}$.
(b) *Ist $\mathrm{MR}(X) = \alpha \in \mathrm{On}$, so ist $\mathrm{MD}(X) = \sum_p \mathrm{MD}(p)$, wobei die Summe über die Menge $\{\mathrm{tp}(\underline{b}/A) \mid \underline{b} \in X, \mathrm{MR}(\mathrm{tp}(\underline{b}/A)) = \alpha\}$ läuft.*

Satz 2.5.20 *Jeder Typ $p \in S_n(A)$ vom Morley-Rang $\alpha \in \mathrm{On}$ ist der generische Typ einer A-definierbaren Menge X, die α-minimal über A ist. X ist durch p eindeutig bestimmt bis auf Mengen kleineren Morleyrangs.*

Definition 2.5.21 *Eine Theorie T heißt* ***total transzendent****, wenn in keinem Modell von T ein unendlicher binärer Baum von nicht-leeren definierbaren Mengen existiert, also definierbare Mengen $X_s \subseteq M^n$, wobei s alle endlichen 0-1-Folgen durchläuft, so dass für alle s gilt: $X_{s0} \subseteq X_s, X_{s1} \subseteq X_s, X_{s0} \cap X_{s1} = \emptyset$.*

Satz 2.5.22 *Eine Theorie T ist total transzendent genau dann, wenn jede definierbare Menge einen Morleyrang besitzt. Genauer gilt: Eine definierbare Menge X in einer $\aleph_0$-saturierten Struktur hat Morleyrang ∞ genau dann, wenn sie die Wurzel eines binären Baums von nicht-leeren definierbaren Mengen ist.*

Beispiel 2.5.23 *Jede streng minimale Theorie ist total transzendent.*

Definition 2.5.24 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Theorie T heißt* ***κ-stabil****, wenn für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jede Parametermenge $A \subseteq M$ mit Kardinalität $|A| \leq \kappa$ gilt: Die Menge $S_1(A)$ der 1-Typen über A hat Kardinalität höchstens κ.*

Satz 2.5.25 *Für Theorien T gelten die folgenden Implikationen:*

T ist $\aleph_0$-stabil $\Rightarrow$ T ist total-transzendent $\Rightarrow$ T ist κ-stabil für jedes $\kappa \geq \max\{\aleph_0, |L|\}$.

Insbesondere: Ist L höchstens abzählbar, so ist total transzendent äquivalent zu $\aleph_0$-stabil.

Korollar 2.5.26 *Ist T total transzendent, so besitzt T für jede unendliche Nachfolgekardinalzahl $\kappa^+ > |L|$ ein vollständig saturiertes Modell der Kardinalität κ^+.*

3 Imaginäre Elemente

3.1 Mehrsortige Sprachen

Definition 3.1.1 *Sprachen, wie wir sie bisher definiert haben, nennt man auch* ***einsortige Sprachen****. Eine* ***mehrsortige Sprache*** *L unterscheidet sich von einer einsortigen Sprache wie folgt:*

(a) *Es gibt zusätzliche eine Menge von* ***Sortensymbolen****. (Oft werden die Sortensymbole auch einfach nur* ***Sorten*** *genannt.)*
(b) *Jedem Konstantensymbol c ist ein Sortensymbol S zugeornet; Notation: $c \in S$.*
(c) *Jedem n-stelligen Funktionssymbol f ist ein $(n+1)$-Tupel $S_1, \dots, S_n, S'$ von Sortensymbolen zugeornet; Notation: $f\colon S_1 \times \dots \times S_n \to S'$.*
(d) *Jedem n-stelligen Relationssymbol R ist ein n-Tupel $S_1, \dots, S_n$ von Sortensymbolen zugeornet; Notation: $R \subseteq S_1 \times \dots \times S_n$.*

Definition 3.1.2 *Sei L eine mehrsortige Sprache. Eine (mehrsortige) L-**Struktur** $\mathcal{M}$ besteht aus:*

- *für jedes Sortensymbol S: eine Menge $S^{\mathcal{M}}$;*
- *für jedes Konstantensymbol $c \in S$: ein Element $c^{\mathcal{M}} \in S^{\mathcal{M}}$;*
- *für jedes Funktionsymbol $f\colon S_1 \times \dots \times S_n \to S'$: eine Funktion $f^{\mathcal{M}}\colon S_1^{\mathcal{M}} \times \dots \times S_n^{\mathcal{M}} \to (S')^{\mathcal{M}}$;*
- *für jedes Relationssymbol $R \subseteq S_1 \times \dots \times S_n$: eine Menge $R^{\mathcal{M}} \subseteq S_1^{\mathcal{M}} \times \dots \times S_n^{\mathcal{M}}$.*

Die Mengen $S^{\mathcal{M}}$ nennt man die ***Sorten*** *von $\mathcal{M}$. Die* ***Grundmenge*** *M von $\mathcal{M}$ ist die (disjunkte) Vereinigung aller Sorten von $\mathcal{M}$.*

Definition 3.1.3 *Homomorphismen, Einbettungen, Isomorphismen, etc. von mehrsortigen Strukturen werden wie erwartet definiert. (Ein Homomorphismus $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ ist eine Abbildung $M \to M'$, die insbesondere die Sorten respektiert.)*

Definition 3.1.4 *Die Definition von Termen und Formeln wird wie folgt auf mehrsortige Sprachen verallgemeinert:*

- *Jeder Variable x und jedem L-Term $t(\underline{x})$ ist eine Sorte S zugeornet. (Notation: $x \in S$ bzw. $t(\underline{x}) \in S$). Insbesondere haben Quantoren die Form „$\exists x \in S$“ oder „$\forall x \in S$“.*
- *Funktionen und Relationen können nur auf Terme der richtigen Sorte angewandt werden. (Z. B.: Ist $f\colon S_1 \times \dots \times S_n \to S'$ ein Funktionssymbol und ist t_i ein Term der Sorte S_i für $i = 1, \dots n$, so ist $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term der Sorte S'.)*

- *Gleichheit („$t_1 = t_2$“) darf nur für Terme der gleichen Sorte verwendet werden.*

Definition 3.1.5 *Die Interpretation von mehrsortigen Termen und Formeln in einer Struktur $\mathcal{M}$ wird auf naheliegende Weise verallgemeinert. Insbesondere: Sei $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$.*

- *Ein Term $t(\underline{x})$ der Sorte S' wird als eine Funktion $S_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times S_n^{\mathcal{M}} \to (S')^{\mathcal{M}}$ interpretiert.*
- *Eine Formel $\phi(\underline{x})$ definiert eine Menge $\phi(\mathcal{M}) \subseteq S_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times S_n^{\mathcal{M}}$.*
- *Mit einer „**definierbaren Menge** $X \subseteq M^n$“ ist immer eine Teilmenge von $S_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times S_n^{\mathcal{M}}$ gemeint, für gewisse Sorten $S_1, \ldots, S_n$.*

Von nun an dürfen Sprachen, Strukturen, Formeln, Theorien, etc. immer mehrsortig sein.

Notation 3.1.6 *Ist $\underline{x}$ ein n-Tupel von Variablen (in vorgegebenen Sorten) und A eine Teilmenge einer Struktur, so ist $S_{\underline{x}}(A)$ die Menge der vollständigen Typen über A in den Variablen $\underline{x}$.*

3.2 Imaginäre Elemente und Imaginären-Elimination

Definition 3.2.1 *Sei L eine Sprache und T eine L-Theorie.*

(a) *Wir definieren eine neue Sprache $L^{\mathrm{eq}} \supseteq L$ wie folgt: Für jedes Produkt $\underline{S} := S_1 \times \cdots \times S_n$ von Sorten von L und für jede L-definiarbare (in T) Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\underline{S}$ führen wir eine neue Sorte $S_\sim$ und ein neues Funktionssymbol $\pi_\sim \colon \underline{S} \to S_\sim$ ein.*

(b) *Die L^{eq}-Theorie T^{eq} besteht aus der Theorie T und einer zusätzlichen L^{eq}-Aussage $\phi_\sim$ für alle $\underline{S}$ und $\sim$ wie in (a), die besagt, dass $\pi_\sim$ eine surjektive Abbildung ist, deren Fasern genau die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind. Also formal:*

$$\begin{aligned}\phi_\sim = & \forall x \in S_\sim \colon \exists \underline{y} \in \underline{S} \colon \pi_\sim(\underline{y}) = x \qquad \wedge \\ & \forall \underline{y}, \underline{y}' \in \underline{S} \colon (\pi_\sim(\underline{y}) = \pi_\sim(\underline{y}') \leftrightarrow \underline{y} \sim \underline{y}')\end{aligned}$$

(c) *Ist $\mathcal{M}$ ein Modell von T, so definieren die L^{eq}-Struktur $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ wie folgt:*
  - *Die Symbole aus L werden in $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ genauso wie in $\mathcal{M}$ interpretiert. (Insbesondere ist $M \subseteq M^{\mathrm{eq}}$.)*
  - *Sind $\underline{S}$, $\sim$, $S_\sim$ und $\pi_\sim$ wie in (a), so setzen wir $S_\sim^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}} := \underline{S}^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}}/\!\sim$, und $\pi_\sim$ ist die kanonische Abbildung $\underline{S}^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}} \to S_\sim^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}}$.*

*Die oben neu eingeführten Sorten $S_\sim$ und $S_\sim^{\mathcal{M}}$ nennt man **imaginäre Sorten** von T (oder von L oder von $\mathcal{M}$). Elemente von imaginären Sorten $S_\sim^{\mathcal{M}}$ nennt man **imaginäre Elemente** von $\mathcal{M}$. Definierbare Teilmengen von $(M^{\mathrm{eq}})^n$ nennt man* *auch **imaginäre definierbare Mengen** in M. Die Sorten von $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$, die bereits in $\mathcal{M}$ existieren, nennt man **Heim-Sorten**.*

Bemerkung 3.2.2 *Offensichtlich ist $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ ein Modell von T^{eq}.*

Lemma 3.2.3 *Ist $\underline{x}$ ein Tupel von Variablen mit Sorten von L, so existiert zu jeder L^{eq}-Formel $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel $\phi'(\underline{x})$, die (modulo T^{eq}) zu ϕ äquivalent ist.*

Bemerkung 3.2.4 *Man kann auch eine entsprechende Aussage für Formeln mit Variablen in beliebigen Sorten formulieren: Eine Menge X in $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ ist L^{eq}-definierbar genau dann, wenn ihr Urbild in $\mathcal{M}$ L-definierbar ist. Genauer: Ist $X \subseteq S_{\sim_1} \times \cdots \times S_{\sim_m} = \underline{S}_1/{\sim_1} \times \cdots \times \underline{S}_m/{\sim_m}$ (wobei $\sim_i$ eine Äquivalenzrelation auf einem Produkt $\underline{S}_i$ von L-Sorten ist), so ist mit „Urbild" das Urbild in $\underline{S}_1 \times \cdots \times \underline{S}_m$ gemeint.*

Bemerkung 3.2.5 *Das Lemma gilt auch für Formeln mit Parametern: Ist $X \subseteq M^n$ in $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ mit beliebigen Parametern aus M^{eq} definierbar, so ist X bereits in M mit Parametern aus M definierbar.*

Lemma 3.2.6 *Ist T eine vollständige L-Theorie, so ist T^{eq} eine vollständige L^{eq}-Theorie. (Insbesondere ist dann $T^{\mathrm{eq}} = \mathrm{Th}_{L^{\mathrm{eq}}}(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})$, für ein beliebiges Modell $\mathcal{M} \models T$.)*

Bemerkung 3.2.7 *Die Zuordnung $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ eine Bijektion zwischen den Modellen von T und den Modellen von T^{eq}. (Diese Zuordnung erhält diverse Eigenschaften von Modellen, z. B. Saturiertheit.)*

Bemerkung 3.2.8 *In $(\mathcal{M}^{\mathrm{eq}})^{\mathrm{eq}}$ gibt es zu jeder Sorte eine $\emptyset$-definierbare Bijektion zu einer Sorte von $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$.*

Definition 3.2.9 *Tupel $\underline{a} \in M^n$ und $\underline{b} \in M^m$ heißen **interdefinierbar**, wenn sowohl $\underline{a} \in \mathrm{dcl}(\underline{b})$ als auch $\underline{b} \in \mathrm{dcl}(\underline{a})$ ist. (Hierbei ist $\underline{a} \in \mathrm{dcl}(\underline{b})$ eine Kurzschreibweise für $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{dcl}(\underline{b})$.)*

Bemerkung 3.2.10 *Für $\underline{a} \in M^n$ und $\underline{b} \in M^m$ sind äquivalent:*

(a) *$\underline{a}$ und $\underline{b}$ sind interdefinierbar.*
(b) *Für beliebige Mengen $X \subseteq M^k$ gilt: X ist $\underline{a}$-definierbar genau dann, wenn X $\underline{b}$-definierbar ist.*
(c) *Es existiert eine $\emptyset$-definierbare Bijektion $f\colon Y \to Z$ (für $Y \subseteq M^n$ und $Z \subseteq M^m$ $\emptyset$-definierbar) mit $f(\underline{a}) = \underline{b}$.*

Definition 3.2.11 *Eine Theorie T hat **Imaginären-Elimination**, wenn für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ gilt: Jedes imaginäre Element ist (in $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$) interdefinierbar zu einem Tupel aus M^n. Eine Struktur $\mathcal{M}$ hat **Imaginären-Elimination**, wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ Imaginären-Elimination hat.*

Bemerkung 3.2.12 *Sei T eine beliebige L-Theorie (für eine beliebige Sprache L). Dann hat T^{eq} Imaginären-Elimination.*

Beispiel 3.2.13 *Sei $\mathcal{M} = (M, <, 0, 1, +, \dots)$ o-minimal; wir fordern also, dass auf M eine Gruppenstruktur ist und eine Konstante für ein weiteres Element (außer 0), das wir 1 nennen. Dann hat $\mathcal{M}$ Imaginären-Elimination.*

Satz 3.2.14 *Hat $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ Imaginären-Elimination, und ist $\sim$ eine $\emptyset$-definierbare Äquivalenzrelation auf einer $\emptyset$-definierbaren Menge X, so existieren endlich viele $\emptyset$-definierbare Abbildungen $f_i \colon X_i \to Y_i$, für $i = 1, \dots, \ell$, so dass X die disjunkte Vereinigung der X_i ist, und so dass für $\underline{a}, \underline{a}' \in X$ gilt: $\underline{a} \sim \underline{a}'$ genau dann, wenn $\underline{a}$ und $\underline{a}'$ in der gleichen Menge X_i liegen und $f_i(\underline{a}) = f_i(\underline{a}')$ ist.*

3.3 Codes für definierbare Mengen

Definition 3.3.1 *Sei $X \subseteq M^n$ definierbar. Ein Tupel $\underline{a} \in M^m$ heißt **Code** für X, wenn eine Formel $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ existiert, so dass für alle $\underline{a}' \in M^m$ gilt: $\phi(\mathcal{M}, \underline{a}') = X$ genau dann, wenn $\underline{a}' = \underline{a}$ ist.*

Beispiel 3.3.2 *Ist X eine Äquivalenzklasse einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf M^n, so ist $X/{\sim} \in M^n/{\sim}$ ein Code für X.*

Lemma 3.3.3 *Sei $X \subseteq M^n$ definierbar und $\underline{a}$ ein Code für X. Dann gilt für alle $\underline{b}$:*

(a) *X ist $\underline{b}$-definierbar genau dann wenn $\underline{a} \in \mathrm{dcl}(\underline{b})$.*
(b) *$\underline{b}$ ein Code für X genau dann, wenn $\underline{b}$ und $\underline{a}$ interdefinierbar sind.*

Satz 3.3.4 *$\mathcal{M}$ hat Imaginären-Elimination genau dann, wenn für jede elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ gilt: Jede in $\mathcal{M}'$ definierbare Menge besitzt einen Code.*

Notation 3.3.5 *Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur und $A \subseteq \mathcal{M}$. Wir setzen*

$$\mathrm{Aut}_A(\mathcal{M}) := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \mid \forall a \in A \colon \alpha(a) = a.\}$$

Ist $\underline{a}$ ein Tupel, so schreiben wir auch $\mathrm{Aut}_{\underline{a}}(\mathcal{M})$ für $\mathrm{Aut}_{\{a_1,,\dots,a_n\}}(\mathcal{M})$.

Konvention 3.3.6 *Für den Rest des Abschnitts nehmen wir an, dass $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturiert ist und dass sich jede elementare Abbildung zwischen endlichen Teilmengen von $\mathcal{M}$ zu einem Automorphismus von $\mathcal{M}$ fortsetzen lässt. (Solche Strukturen nennt man **stark $\aleph_0$-homogen**.)*

Bemerkung 3.3.7 *Vollständig saturierte Strukturen erfüllen diese Bedingung (nach Korollar 1.2.7). Man kann außerdem zeigen, dass jede Theorie Modelle besitzt, die Konvention 3.3.6¨ erfüllen.*

Lemma 3.3.8 *Sei $\mathcal{M}$ wie in Konvention 3.3.6. Dann gilt für $\underline{a} \in M^n$ und $\underline{b} \in M^m$: $\underline{b} \in \operatorname{dcl}(\underline{a})$ genau dann, wenn $\operatorname{Aut}_{\underline{a}}(\mathcal{M}) \subseteq \operatorname{Aut}_{\underline{b}}(\mathcal{M})$.*

Lemma 3.3.9 *Sei $\mathcal{M}$ wie in Konvention 3.3.6, sei $X \subseteq M^n$ definierbar, und sei $\underline{a} \in M^m$. Dann ist $\underline{a}$ ein Code für X genau dann, wenn $\operatorname{Aut}_{\underline{a}}(\mathcal{M}) = \{\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathcal{M}) \mid \alpha(X) = X\}$ ist.*

3.4 Imaginären-Elimination in ACF

Wir arbeiten im gesamten Abschnitt in einem algebraisch abgeschlossenen Körper K, aufgefasst als L_{ring}-Struktur.

Lemma 3.4.1 *Seien $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n \in K^m$, und wir betrachten die Äquivalenz-Relation auf $(K^m)^n$, die definiert ist durch: $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \sim (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n) \iff \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$. Diese Äquivalenzrelation wird in K eliminiert, d. h. es existiert eine $\emptyset$-definierbare Abbildung $f\colon (K^m)^n \to K^\ell$, so das gilt: $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \sim (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ genau dann, wenn $f((\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)) = f((\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n))$.*

Satz 3.4.2 *Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper hat Imaginären-Elimination.*

Eine kleine Beispiel-Anwendung:

Korollar 3.4.3 *Ist $K_1 \subseteq K_3$ eine Galois-Erweiterung von Körpern und ist $H \subseteq \operatorname{Gal}(K_3/K_1)$ eine Untergruppe der Galois-Gruppe, so existiert ein Zwischenkörper K_2, so dass $H = \operatorname{Gal}(K_3/K_2)$ ist.*