Modelltheorie II – Blatt 1

Abgabe am 18.4.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei K ein Körper, und sei $|\cdot|_\infty\colon K(t) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch: $|0|_\infty = 0$ und $|\frac{f}{g}|_\infty = 2^{\deg f - \deg g}$ für $f, g \in K[t] \setminus \{0\}$.

Zeigen Sie, dass $|\cdot|_\infty$ ein Betrag auf $K(t)$ ist. Ist er archimedisch?

Aufgabe 2 (2+1 Punkte):

Ergänzen Sie die folgenden Details zum Beweis von Satz 1.2.2 (über die Existenz der Vervollständigung eines Körper K mit Betrag $|\cdot|$):

(a) Zu Schritt (1) aus dem Beweisplan: Sind $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchy-Folgen in K, so ist auch ihr Produkt $(a_i \cdot b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(b) Zu Schritt (5) aus dem Beweisplan: Ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so existiert $\lim_{i\to\infty} |a_i|$.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte):

Sei K ein Körper und $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Betrag auf K. Zeigen Sie:

(a) Für $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$ gilt: $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

(b) „Jedes Dreieck ist gleichschenklig“: Für beliebige $x, y, z \in K$ gilt: Mindestens zwei der Beträge $|x-y|$, $|x - z|$ und $|y - z|$ sind gleich.

(c) „Jeder Punkt eines Balls ist Mittelpunkt des Balls“: Sei $x \in K$, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sei $B := \{y \in K \mid |x - y| \leq r\}$ der Ball um x vom Radius r. Dann gilt für jedes $x' \in B$: $B = \{y \in K \mid |x' - y| \leq r\}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Sei K ein Körper und seien $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ zwei Beträge auf K. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) Für jede Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (mit $a_i \in K$) gilt: $\lim_{i\to\infty} |a_i|_1 = 0$ genau dann, wenn $\lim_{i\to\infty} |a_i|_2 = 0$.

(b) Für jedes $a \in K$ gilt: $|a|_1 < 1$ genau dann, wenn $|a|_2 < 1$.

(c) Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $a \in K$ gilt: $|a|_2 = |a|_1^\lambda$.

Ein möglicher Ansatz zu (b) $\Rightarrow$ (c): Betrachten Sie zu zwei gegebenen Elementen $a, b \in K$ die Beträge $|a^k \cdot b^\ell|_1$ und $|a^k \cdot b^\ell|_2$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$.