Modelltheorie II – Blatt 11

Abgabe am 27.6.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Wir arbeiten in einer RV-Erweiterung $L \supseteq L_{\mathrm{RV}}$. Sei $A \subseteq K \cup \mathrm{RV}$ eine Parametermenge. Zeigen Sie: Ist $X \subseteq K^n$ eine A-definierbare Menge mit $\dim X < n$, so ist X bereits eine Teilmenge der Nullstellenmenge eines Polynoms $f \in R[\underline{x}] \setminus \{0\}$, wobei R der von $A \cap K$ erzeugte Unterring von K ist.

Hinweis: Jedes $\underline{a} \in X$ ist Nullstellenmenge eines solchen Polynoms. (Warum?) Wenden Sie den Kompaktheitssatz an, um nur noch endlich viele Polynome zu brauchen.

Aufgabe 2 (3+3+1 Punkte):

Wir arbeiten in der Sprache L_{DP} von Denef-Pas. Sei $K \models \mathrm{HEN}_{0,0}$. Wir nehmen außerdem an, dass acl im Restklassenkörper $\bar{K}$ die Austauscheigenschaft hat, wenn man ihn als L_{ring}-Struktur auffasst. (Also z. B. $\bar{K} = \mathbb{R}$ oder $\bar{K} = \mathbb{C}$.) Ist $Y \subseteq \bar{K}^n$ definierbar, so schreiben wir $\dim Y$ für den acl-Rang von Y in $\bar{K}$ als L_{ring}-Struktur.

(a) Zeigen Sie: Ist $X \subseteq \mathcal{O}_K^n$ eine definierbare Menge mit $\dim X < n$, so ist auch $\dim \mathrm{res}(X) < n$.
Hinweis: Wenn man das Polynom f aus Aufgabe 1 mit einem geeigneten Faktor multipliziert liegt es in $\mathcal{O}_K[\underline{x}]$, aber $\mathrm{res}(f)$ ist nicht das 0-Polynom.

(b) Folgern Sie: Für definierbare Mengen $X \subseteq \mathcal{O}_K^n$ gilt: $\dim X \geq \dim \mathrm{res}(X)$.
Hinweis: Betrachten Sie Projektionen von X auf geeignete Teilmengen der Koordinaten.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die andere Ungleichung nicht gelten muss; also z. B. eine 1-dimensionale definierbare Menge $X \subseteq \mathcal{O}_K$ mit $\dim \mathrm{res}(X) = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei L eine beliebige Sprache, sei T eine L-Theorie und sei S eine Sorte von L. Wir nennen S *stark stabil eingebettet*, wenn gilt: Ist $\mathcal{M} \models T$ ein Modell, $A \subseteq M$ und $X \subseteq (S^{\mathcal{M}})^n$ A-definierbar, so ist X bereits $\mathrm{dcl}_S(A)$ definierbar.[1] Hierbei bezeichnet $\mathrm{dcl}_S(A)$ die Menge der Elemente von S, die über A definierbar sind.

Im Folgenden ist $\underline{x}$ ein n-Tupel von S-Variablen, $\underline{y}$ ein m-Tupel von beliebigen Variablen und $\underline{z}$ ein N-Tupel von S-Variablen.

Zeigen Sie: Ist S stark stabil eingebettet, so gilt sogar die folgende uniforme Version der Bedingung:

Ist $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ eine L-Formel, so existieren L-Formeln $\psi(\underline{x}, \underline{z})$ und $\psi'(\underline{y}, \underline{z})$, so dass gilt: ψ' definiert in jedem Modell $\mathcal{M} \models T$ eine Funktion, die wir mit $f^{\mathcal{M}}$ bezeichnen, und für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jedes $\underline{b} \in \mathcal{M}^m$ von der passenden Sorte für $\underline{y}$ gilt $\phi(\mathcal{M}, \underline{b}) = \psi(\mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}(\underline{b}))$.

Hinweis: Ist $\underline{c} \in \mathrm{dcl}_S(\underline{b})$, so wird dies durch eine Formel $\psi'(\underline{b}, \underline{c})$ bezeugt. Wenn wir ψ und ψ' festhalten, können wir durch eine Formel $\chi_{\psi,\psi'}(\underline{b})$ folgendes ausdrücken: „$\psi'(\underline{b}, \mathcal{M})$ besteht aus genau einem Element $\underline{c}$, und es gilt $\phi(\mathcal{M}, \underline{b}) = \psi(\mathcal{M}, \underline{c})$."

Wenden Sie den Kompaktheitssatz auf diese $\chi_{\psi,\psi'}$ an um zu erhalten, dass endlich viele Paare (ψ_i, ψ'_i) ausreichen, um alle $\mathcal{M}$ und $\underline{b}$ abzudecken. Setzen Sie diese Paare dann zu einem einzigen Paar zusammen.

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Wir arbeiten nun in einem $K \models \mathrm{HEN}_{0,0}$. Zeigen Sie, dass RV stark stabil eingebettet ist, im Sinne der vorigen Aufgabe.

Hinweis: Betrachten Sie eine quantorenfreie Formel, die Ξ definiert.

(Anmerkung: In diesem Fall könnte man leicht auch direkt die uniforme Version in $\mathrm{HEN}_{0,0}$ zeigen. In Aufgabe 1 sollte aber geübt werden, den Kompaktheitssatz anzuwenden.)

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT2-V-S24/

[1] Wenn man nur verlangt, dass X mit beliebigen Parametern aus S definierbar ist, nennt man S *stabil eingebettet* (ohne „stark").