Modelltheorie II – Blatt 12

Abgabe am 4.7.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+1 Punkte):

(a) Seien $X \subseteq K^n$ und $f\colon X \to \mathrm{RV}^m$ definierbar. Zeigen Sie: $\dim X = \max\{\dim f^{-1}(\xi) \mid \xi \in \mathrm{RV}^m\}$. Hinweis: Betrachten Sie einen Zeugen $\underline{a} \in X$ für die Dimension von X. Was sagt $\underline{a}$ über die Dimension der entsprechenden Faser von f?

(b) Folgern Sie: Jede definierbare Abbildung von K^n nach RV^m hat nur endlich viele ein-elementige Fasern.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

In dieser Aufgabe soll Lemma 3.2.13 fertig bewiesen werden. Gegeben war eine endliche Menge $C \subseteq K$. Daraus hatten wir in der Vorlesung bereits folgendes definiert, für $x \in K$:

- $\lambda_1(x) < \cdots < \lambda_{k(x)}(x)$, so dass $\{v(x-c) \mid c \in C\} = \{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{k(x)}\}$
- $C_i(x) := \{x \in C \mid v(x-c) \geq \lambda_i\}$.
- $s_i(x) := \sum_{c \in C_i} \mathrm{rv}(x-c)$, wobei wir die Summe auf 0 setzen, wenn sie nicht wohldefiniert ist.
- $f(x) := (s_1(x), \ldots, s_{k(x)}(x))$

Seien nun $b, b' \in K$. Wir hatten bereits gesehen: Ist $b \sim_C b'$, so gilt $f(b) = f(b')$. Was jetzt noch zu zeigen ist, ist die Umkehrung: Aus $f(b) = f(b')$ folgt $b \sim_C b'$.

Zeigen Sie dazu folgendes per Induktion über i:

(a) $\lambda_i(b) = \lambda_i(b')$

(b) $v(b - b') > \lambda_i(b)$

(c) $C_{i+1}(b) = C_{i+1}(b')$.

(Was ist am Induktionsanfang zu machen? Und wie soll man (c) interpretieren, wenn $i = k(b)$ oder $i = k(b')$ ist?)