Modelltheorie II – Blatt 13

Abgabe am 11.7.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Laut Satz 3.2.9 soll es zur $\emptyset$-definierbaren Menge $X = \{(y^2, y) \mid y \in K\} \subseteq K^2$ eine $\emptyset$-definierbare Abbildung $f\colon K^2 \to \mathrm{RV}^k$ geben, die X in krumme Quader zerlegt (also genauer: so dass jede Faser von f ein krummer Quader ist und X eine Vereinigung von Fasern ist). Geben Sie ein solches f an.

Hinweis: Wenn Sie Schwierigkeiten haben, von Hand ein solches f zu finden, hilft es, den Beweis von Lemma 3.2.13 nochmal anzuschauen.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

Sei K ein beliebiger bewerteter Körper. In Bemerkung 3.2.18 wurde (ohne richtigen Beweis) behauptet, dass für $\lambda \in \Gamma_{\geq 0}$ gilt:

(a) $B_{>\lambda}(1)$ ist eine Untergruppe von $K^\times$.

(b) Für $a, b \in K$ gilt $\mathrm{rv}_\lambda(a) = \mathrm{rv}_\lambda(b)$ genau dann, wenn $v(a-b) > v(a) + \lambda$ ist oder $a = b = 0$.

Führen Sie diese Beweise aus.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie: „Fast die Hälfte der Elemente von $\mathbb{Z}_p$ sind Quadrate.“ Genauer: Ist $X \subseteq \mathbb{Z}_p$ die Menge der Quadrate, so gilt: $\mu(X) = \frac{p}{2(p+1)}$.

Hinweis: In Aufgabe 1 von Blatt 5 hatten wir gesehen, dass $a \in X$ gilt genau dann, wenn $v(a)$ gerade ist und $\mathrm{ac}(a)$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$ ist. Dann stellt sich noch die Frage, wie viele Quadrate in $\mathbb{F}_p$ existieren. Dafür können Sie das Resultat aus der Algebra-Vorlesung verwenden, dass die Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ zyklisch ist (also isomorph zu $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$).

Aufgabe 4 (2+2 Punkte):

Bestimmen Sie die Maße der folgenden Mengen; geben Sie das Ergebnis jeweils als rationale Funktion in p an.

(a) Für natürliche Zahlen $r \geq 1$: $X_r := \{x \in \mathbb{Z}_p \mid \mathrm{ac}(x) = 1 \wedge v(x) \text{ ist durch } r \text{ teilbar}\}$

(b) Für natürliche Zahlen $n \geq 1$: $Y_n := \{\underline{x} \in \mathbb{Z}_p^n \mid \mathrm{ac}(x_1) = \cdots = \mathrm{ac}(x_n) = 1 \wedge v(x_1) = \cdots = v(x_n)\}$.

Hinweis: Jede dieser Mengen ist eine Vereinigung von abzählbar vielen disjunkten Bällen. Bestimmen Sie die Maße dieser Bälle; die Summe sollte sich als geometrische Reihe herausstellen.

Wir arbeiten in der Sprache L_{DP} von Denef-Pas.