Modelltheorie II – Blatt 14

Abgabe am 18.7.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Auf dem gesamten Blatt arbeiten wir in (der Theorie von) $\mathbb{Z}$ als L_{Pres}-Struktur.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass Lemma 3.4.4 folgendermaßen verbessert werden kann: Man kann erreichen, dass für jedes $\underline{a}$ mit $\mathbb{Z} \models \psi_i(\underline{a})$ gilt:

- $t_i(\underline{a}) \leq t'_i(\underline{a})$
- Ist $t_i(\underline{a}) \neq -\infty$, so ist $t_i(\underline{a})$ durch r_i teilbar, und es gilt $\mathbb{Z} \models \phi_i(\underline{a}, t_i(\underline{a})/r_i)$.
- Ist $t'_i(\underline{a}) \neq \infty$, so ist $t'_i(\underline{a})$ durch r_i teilbar, und es gilt $\mathbb{Z} \models \phi_i(\underline{a}, t'_i(\underline{a})/r_i)$.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte):

(a) Folgern Sie aus dem verbesserten Lemma 3.3.4 aus der vorigen Aufgabe: Definierbare Funktionen $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ sind stückweise linear im folgenden Sinn: Es existiert eine Zerlegung von $\mathbb{Z}^n$ in endlich viele definierbare Teilmengen A, so dass die Einschränkungen $f|_A$ sich schreiben lassen in der Form $f(\underline{x}) = \frac{1}{r} \cdot (c + \sum_i r_i x_i)$, für ganze Zahlen r, c, r_i mit $r \neq 0$. (Implizit wird hier angenommen, dass der Ausdruck für $f(\underline{x})$ ganzzahlig ist für alle $\underline{x} \in A$.)

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine L_{Pres}-definierbare Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ an, bei der in der obigen Darstellung für (mindestens) eine der Mengen A ein $r \geq 2$ benötigt wird.

Aufgabe 3 (2+2+3 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Für jede elementar äquivalente Struktur $Z \equiv \mathbb{Z}$ und jede Menge $A \subseteq Z$ gilt $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{dcl}(A)$

(b) In $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ hat acl die Austauscheigenschaft.
Hinweis: Ist $c \in \mathrm{dcl}(A, b)$, so existiert eine A-definierbare Funktion $f\colon Z \to Z$ mit $f(b) = c$. Wenden Sie die vorige Aufgabe auf f an.

(c) Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \geq 0 \wedge 0 \leq y \leq t(x)\}$, wobei $t(x)$ ein L_{Pres}-Term ist mit $t(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Bestimmen Sie den acl-Rang von X.
Anmerkung: Dies hängt von t ab.