Modelltheorie II – Blatt 2

Abgabe am Mo, 29.4.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

Sei k ein beliebiger Körper. Schreiben Sie die folgenden Elemente von $k((t))$ in der Form $\sum_{i\geq N} a_i t^i$ (mit $N \in \mathbb{Z}$, $a_i \in k$):

(a) $\frac{1}{1-t^2}$

(b) $\frac{1}{(1-t)^2}$

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Aus der Analysis wissen wir: Nur, weil eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, bedeutet das noch nicht, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert. Wenn wir mit einem nicht-archimedischem Betrag arbeiten, ist das schöner:

Sei $(K, |\cdot|)$ ein vollständiger Körper mit nicht-archimedischem Betrag. (Gemeint ist: K soll vollständig bezüglich der von $|\cdot|$ induzierten Metrik sein.) Seien $a_i \in K$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die folgenden Ringisomorphismen existieren:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

(b) Ist $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p, so ist $\mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p \cong \{0\}$.

Aufgabe 4 (3+1 Punkte):

Manchmal werden die p-adischen Zahlen anders definiert als in der Vorlesung, nämlich: Erst definiert man $\mathbb{Z}_p$ als einen projektiven Limes (s. u.), und dann definiert man daraus $\mathbb{Q}_p$. In dieser Aufgabe wollen wir überprüfen, dass das mit unserer Definition übereinstimmt (bis auf Isomorphismus).

(a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei R_m ein Ring und $\pi_m \colon R_{m+1} \to R_m$ ein Ringhomomorphismus. Der *projektive Limes* dieser Ringe ist definiert als

$$\varprojlim_m R_m := \{(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \mid \forall m\colon a_m \in R_m \wedge \pi_m(a_{m+1}) = a_m\}$$

(Ein Element des projektiven Limes ist also eine Folge von Elementen $a_r \in G_r$, die „zusammenpassen“ im Sinne der Abbildungen π_r.)
Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_p$ ist (als Ring) isomorph zum Projektiven Limes $\varprojlim_m \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, wobei $\pi_m \colon \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ die kanonische Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}_p$ der Brüchekörper von $\mathbb{Z}_p$ ist und als Ring sogar schon von $\mathbb{Z}_p \cup \{p^{-1}\}$ erzeugt wird.

Aufgabe 5 (3 Punkte):

Man könnte auf die Idee kommen, mit der Definition aus Aufgabe 4 auch die 10-adischen Zahlen zu definieren zu können: Sei

$$\mathbb{Z}_{10} := \varprojlim_m \mathbb{Z}/10^m\mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass dieser Ring nicht nullteilerfrei ist (so dass der Brüchekörper davon nicht existiert).

Hinweis: Hier sind zwei völlig verschiedene Lösungsansätze:

- Aus $\mathbb{Z}/10^m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/5^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ lässt sich $\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ herleiten.
- Wählen Sie Nullteiler $a_1 \cdot b_1 = 0$ in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass ein Paar $a_m \cdot b_m = 0$ in $\mathbb{Z}/10^m\mathbb{Z}$ sich „liften“ lässt zu einem Paar $a_{m+1} \cdot b_{m+1} = 0$ in $\mathbb{Z}/10^{m+1}\mathbb{Z}$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT2-V-S24/