Modelltheorie II – Blatt 3

Abgabe am 2.5.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei (K, v) ein bewerteter Körper, sei $f \in K[X]$ ein Polynom und sei $a \in K$. Zeigen Sie, dass eine Umgebung U von a in K existiert (also z. B. ein offener Ball) so dass gilt:

- Ist a keine Nullstelle von f, so ist $b \mapsto v(f(b))$ konstant auf U.
- Ist a eine d-fache Nullstelle von f, so existiert ein $\gamma \in \Gamma$, so dass $v(f(b)) = d \cdot v(b - a) + \gamma$ ist für alle $b \in U$.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte):

Sei (K, v) ein bewerteter Körper.

(a) Zeigen Sie, dass auf dem Körper $K(X)$ der rationalen Funktionen eine Bewertung $v_{\text{Gauß}}$ existiert mit $v_{\text{Gauß}}(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \min\{v(a_0), \dots, v(a_n)\}$. (Man nennt dies die *Gauß-Bewertung* auf $K(X)$.)

(b) Sei $f \in \mathcal{O}_K[X]$ ein Polynom, das sich als Produkt von zwei Polynomen $g_1, g_2 \in K[X]$ schreiben lässt. Zeigen Sie, dass sich f dann auch als Produkt von Polynomen $h_1, h_2 \in \mathcal{O}_K[X]$ schreiben lässt mit $\deg h_1 = \deg g_1$ und $\deg h_2 = \deg g_2$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Sei R ein faktorieller Ring und $K := \operatorname{Frac} R$ sein Brüchekörper.

(a) Zeigen Sie: R ist der Schnitt von (möglicherweise unendlich vielen) Bewertungsringen von K.
Hinweis: Verwenden Sie die irreduziblen Elemente von R.

(b) In der Algebra-Vorlesung wurde gezeigt: Ist $f \in R[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad ≥ 1, so ist f auch als Polynom über K irreduzibel. Geben Sie einen neuen Beweis davon unter Verwendung von (a) und Aufgabe 2 (b).
Hinweis: Ist $f = g \cdot h$ und ist $p \in R$ irreduzibel, so ist ein $r \in \mathbb{Z}$ gesucht, so dass in den Koeffizienten von $p^r g$ und $p^{-r} h$ keine negativen Potenzen von p auftreten.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte):

Sei K ein algebraisch abgeschlossener bewerteter Körper. Zeigen Sie:

(a) Die Wertegruppe Γ ist divisibel.

(b) Der Restklassenkörper $\bar{K}$ ist auch algebraisch abgeschlossen.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT2-V-S24/