Modelltheorie II – Blatt 4

Abgabe am 9.5.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte):

Sei K ein bewerteter Körper, sei $f \in K[X]$, sei $a \in K^\times$.

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Polygon von $g(X) := af(X) \in K[X]$ bereits durch das Newton-Polygon von f festgelegt ist, und beschreiben Sie, wie man das Newton-Polygon von g aus dem von f erhalten kann (am besten mit Bildchen).

(b) Zeigen Sie, dass das Newton-Polygon von $g(X) := f(aX) \in K[X]$ bereits durch das Newton-Polygon von f festgelegt ist, und beschreiben Sie, wie man das Newton-Polygon von g aus dem von f erhalten kann (am besten mit Bildchen).

(c) Zeigen Sie, dass das Newton-Polygon von $g(X) := f(X + a) \in K[X]$ im Allgemeinen nicht durch das Newton-Polygon von f festgelegt ist (d. h. geben Sie f_1, f_2, a an, so dass f_1 und f_2 das gleiche Newton-Polygon haben, aber nicht die entsprechenden Polynome $g_i(X) := f_i(X + a)$).

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte):

In der Vorlesung haben wir gesehen:

($\star$) Es existiert ein $a = \sum_{i\geq 0} r_i \cdot 7^i \in \mathbb{Z}_7$ (für $r_i \in \{0, \dots, 6\}$) mit $a^2 = 2$ und $r_0 = 3$.

Wir setzen im Folgenden $a_m := \sum_{i=0}^{m} r_i \cdot 7^i$.

(a) Zeigen Sie: Sind $r_0, \dots, r_m$ so gewählt, dass $v(a_m^2 - 2) > m$ ist (für ein $m \geq 0$), so existiert genau ein $r_{m+1} \in \{0, \dots, 6\}$, so dass $v(a_{m+1}^2 - 2) > m$.

(b) Benutzen Sie (a), um einen neuen Beweis von ($\star$) zu erhalten.

(c) Bestimmen Sie auf diese Art r_1 und r_2.

Aufgabe 3 (1+1+3+1 Punkte):

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass in henselschen Körpern K bereits Newtons Lemma gilt. Seien also $f = \sum_i c_i X^i \in \mathcal{O}_K[X]$ und $a \in \mathcal{O}_K$ gegeben, so dass

$$v(f(a)) > 2v(f'(a)) \qquad (\star)$$

gilt. Wir suchen eine Nullstelle $b \in \mathcal{O}_K$ von f mit

$$v(b - a) \geq v(f(a)) - v(f'(a)). \qquad (\star\star_f)$$

(a) Zeigen Sie, dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $a = 0$ ist.

Wir nehmen ab jetzt $a = 0$ an.

(b) Zeigen Sie, dass das Newtonpolygon von f bei $(1, v(c_1))$ einen Knick hat.

(c) Zeigen Sie, dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $v(c_1) = 0$ ist; ersetzen sie dazu das Polynom $f(x)$ durch $g(x) := e_1 f(e_2 x)$, für geeignete geeignetes $e_1, e_2 \in K^\times$.
Prüfen Sie inbesondere, dass Ihr g immer noch in $\mathcal{O}_K[X]$ liegt und ($\star$) erfüllt und auch, dass eine Nullstelle von g, die ($\star\star_g$) erfüllt, eine Nullstelle von f liefert, die ($\star\star_f$) erfüllt.
Hinweis: Die Bildchen aus Aufgabe 1 helfen vermutlich, e_1 und e_2 zu wählen.

(d) Machen Sie den Beweis von Newtons Lemma fertig.