Modelltheorie II – Blatt 5

Abgabe am 16.5.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Anmerkung: Auf diesem Blatt gibt es zwar wie üblich insgesamt 16 Punkte, aber wegen Feiertag wird es für die Gesamtpunktzahl als halbes Blatt gewertet, d. h. es gibt 8 Punkte und man kann noch 8 Bonuspunkte bekommen.

Aufgabe 1 (1+3 Punkte):

Sei p prim und $a \in \mathbb{Q}_p$.

(a) Falls $p \geq 3$: Beschreiben Sie, wie man an $v(a)$ und $\mathrm{ac}(a)$ erkennen kann, ob a ein Quadrat in $\mathbb{Q}_p$ ist.

(b) Falls $p = 2$; wir schreiben $a = \sum_{i \geq N} r_i 2^r$, für $r_i \in \{0, 1\}$ und $r_N = 1$. Beschreiben Sie, wie man an $v(a)$, r_N, r_{N+1} und r_{N_2} ablesen kann, ob a ein Quadrat ist.
Hinweis: Verwenden Sie Newtons Lemma. (Wie gut muss eine Annäherung an eine Wurzel sein, damit man eine echte Wurzel findet?)

Aufgabe 2 (3+3 Punkte):

(a) Verallgemeinern Sie den Beweis aus der Vorlesung: Ist K ein henselscher bewerteter Körper der Charakteristik $(0, 0)$, ist ac eine anguläre Komponente auf K und ist $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, so gilt für $a \in K$: a ist eine n-te Potenz genau dann, wenn $v(a)$ in Γ durch n teilbar ist und $\mathrm{ac}(a)$ eine n-te Potenz in $\bar{K}$ ist.

(b) In Aufgabe 1 (b) haben wir gesehen, dass das in bewerteten Körpern der Charakteristik $(0, p)$ ein bisschen komplizierter werden kann: um n-te Potenz zu überprüfen, muss man evtl. mehrere Leitkoeffizienten anschauen. Jetzt wollen wir sehen, dass es in bewerteten Körpern der Charakteristik (p, p) noch viel schlimmer werden kann: Bestimmen Sie die Menge der Quadrate in $\mathbb{F}_2((t))$.
Hinweis: Quadrieren Sie einfach mal ein paar Elemente um zu sehen, was rauskommt.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte):

Sei $f := X^2 \in \mathbb{Z}[X]$.

(a) Bestimmen Sie $\#V_f(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ für p prim und $r \in \mathbb{N}$.
Anmerkung: Evtl. hilft eine Fallunterscheidung danach, ob r gerade ist.

(b) Zeigen Sie: Die entsprechende Poincaré-Reihe lässt sich schreiben als $P_{f,p}(Z) = \frac{1+Z}{1-pZ^2}$.

(c) Was ist die Poincaré-Reihe $P_{g,p}(Z)$ von $g = X^m$ (für $m \geq 2$)?