Modelltheorie II – Blatt 6

Abgabe am 23.5.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Anmerkung: Auf diesem Blatt gibt es zwar wie üblich insgesamt 16 Punkte, aber wegen Feiertag (schon wieder) wird es für die Gesamtpunktzahl als halbes Blatt gewertet, d. h. es gibt 8 Punkte, und man kann noch 8 Bonuspunkte bekommen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei k ein Körper; wir betrachten $K := k((t))$ als L_{RV}-Struktur. Zeigen Sie: Ist $k \neq \mathbb{F}_2$, so ist die Abbildung $\mathrm{ac}\colon K \to k$ nicht $L_{\mathrm{RV}}^{\mathrm{eq}}$-definierbar. (Hierbei fassen wir $k = \bar{K}$ als imaginäre Sorte von K auf.)

Hinweis: Geben Sie einen Automorphismus α von K als L_{RV}-Struktur an, der die Identität auf $\bar{K}$ induziert, so dass aber im Allgemeinen nicht $\mathrm{ac}(\alpha(a)) = \mathrm{ac}(a)$ gilt.

Aufgabe 2 (3+2+1 Punkte):

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Sind $a, b \in \mathbb{Q}_p$ mit $v(b) \geq v(a)$, so ist $a^2 + pb^2$ ein Quadrat.

(b) Sind $a, b \in \mathbb{Q}_p$ mit $v(b) < v(a)$, so ist $a^2 + pb^2$ kein Quadrat.

(c) In $\mathbb{Q}_p$ als L_{ring}-Struktur ist $\mathbb{Z}_p$ definierbar.

Anmerkung: Mit einer abgewandelten Version des Arguments kann man (c) auch für $p = 2$ zeigen.

Aufgabe 3 (2+4+1 Punkte):

Sei k ein Körper und Γ eine angeordnete abelsche Gruppe. Wir wollen die Definition von $k((t))$ wie folgt verallgemeinern: Wir definieren den *Hahn-Körper* $k((t^\Gamma))$ als die Menge derjenigen formalen Summen der Form

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma,$$

für $a_\gamma \in k$, bei denen die *Träger-Menge* $\operatorname{supp} a := \{\gamma \in \Gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$ wohlgeordnet ist. (Im Fall $\Gamma = \mathbb{Z}$ ist also $k((t^\Gamma)) = k((t))$.) Außerdem definieren wir eine Abbildung $v\colon k((t^\Gamma)) \setminus \{0\} \to \Gamma, a \mapsto \min \operatorname{supp} a$.

(a) Zeigen Sie, dass $k((t^\Gamma))$ mit der durch die Notation suggerierten Addition und Multiplikation ein Ring wird.
Genauer: Die Ring-Axiome brauchen Sie nicht zu zeigen (die glauben wir einfach), aber prüfen Sie, dass die Menge $k((t^\Gamma))$ und Summen und Produkten abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass in $k((t^\Gamma))$ multiplikative Inverse existieren.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass es reicht, multiplikative Inverse von Elementen $a \in k((t^\Gamma))$ mit $v(a) = 0$ zu finden. (Das ist zwar nicht zwingend nötig, macht aber den Rest einfacher.) Ein potentielles inverses Element von a können wir schreiben in der Form $b = \sum_{\alpha<\beta} b_\alpha t^{\gamma_\alpha}$, wobei die Summe über Ordinalzahlen läuft und $\alpha \mapsto \gamma_\alpha$ aufsteigend ist. Definieren Sie die gesuchten $(b_\alpha, \gamma_\alpha)$ rekursiv so, dass man in jedem Schritt eine bessere Annäherung erhält.

(c) Zeigen Sie, dass $(k((t^\Gamma)), v)$ ein bewerteter Körper ist.