Modelltheorie II – Blatt 7

Abgabe am 30.5.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei K ein bewerteter Körper, aufgefasst als L_{RV}-Struktur. Zeigen Sie: $\Gamma \cup \{\infty\}$ ist eine imaginäre Sorte, und alles, was L_Γ-definierbar ist, ist auch L_{RV}-definierbar.

Anmerkung: Eine (kleine) Schwierigkeit besteht darin, die Ordnung auf Γ zu definieren.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Zeigen Sie, dass eine L_{RV}-Theorie existiert, deren Modelle genau die bewerteten Körper sind. (Genauer: Eine L_{RV}-Struktur $(K, \mathrm{RV}, \dots, \mathrm{rv})$ soll ein Modell der Theorie sein genau dann, wenn auf K eine Bewertung existiert, so dass $\mathrm{rv}\colon K \to \mathrm{RV}$ die entsprechende Leittermstruktur ist.)

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Wir fassen $k(\!(t)\!)$ als L_{RV}-Struktur auf, wobei k ein Körper mit mehr als zwei Elementen ist. Zeigen Sie, dass ac nicht definierbar ist.

Hinweis: Das kann man mit einem geeigneten L_{RV}-Automorphismus von $k(\!(t)\!)$ machen.

Aufgabe 4 (3+5 Punkte):

(a) Auf dem vorigen Blatt haben Sie den Hahn-Körper $k(\!(t^\Gamma)\!)$ kennengelernt (für einen Körper k und eine angeordnete abelsche Gruppe Γ).
Zeigen Sie, dass $k(\!(t^\Gamma)\!)$ *sphärisch vollständig* ist, d. h. ist $(B_i)_{i\in I}$ eine Kette von abgeschlossenen Bällen in K, so ist der Schnitt $\bigcap_{i\in I} B_i$ nicht leer.
Hinweis: Wenn $a = \sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma t^\gamma$ im Schnitt liegen soll, legt jeder Ball B_i die r_γ bis zu einer gewissen Grenze fest. Kann man das zu einer einzigen Summe zusammensetzen, und hat die dann einen wohlgeordneten Träger?

(b) Zeigen Sie jetzt: Jeder sphärisch vollständige bewertete Körper K ist bereits henselsch, d. h. sind $f \in \mathcal{O}_K[x]$ und $a \in \mathcal{O}_K$ mit $v(f(a)) > 0$ und $v(f'(a)) = 0$, so existiert ein $b \in \mathcal{O}_K$ mit $f(b) = 0$ und $v(b - a) > 0$.
Wenn Sie möchten, können Sie dem folgenden Plan folgen:

- (i) $f'(a') = 0$ für alle $a' \in k[[t^\Gamma]]$ mit $v(a' - a) > 0$.
- (ii) Sei $\lambda \in \Gamma_{\geq 0}$. Existiert ein $a' \in k[[t^\Gamma]]$ mit $v(f(a')) \geq \lambda$, so ist $\{c \in k[[t^\Gamma]] \mid v(f(c)) \geq \lambda\} = B_{\geq\lambda}(a') =: B_\lambda$.
- (iii) ... und außerdem existiert ein $a'' \in B_{\geq\lambda}(a')$ mit $v(f(a'')) > \lambda$.
- (iv) Sei nun $\Lambda \subseteq \Gamma$ die Menge der λ, so dass ein a' wie in (b) existiert (so dass also insbesondere B_λ definiert werden kann). Zeigen Sie, dass der Schnitt $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ nicht leer ist. Wenn b in diesem Schnitt liegt, was besagt $v(f(b))$ dann über Λ?
- (v) Zeigen Sie andererseits (mit Hilfe von (iii)), dass Λ kein Maximum hat. (Wenn Sie das Gefühl haben, einen Widerspruch zu (iv) bekommen zu haben, überlegen Sie nochmal, was für ein b wir eigentlich haben wollen.)