Modelltheorie II – Blatt 8

Abgabe am 6.6.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei K ein henselscher Bewerteter Körper mit $\operatorname{char} \bar{K} \geq 3$. Zeigen Sie: Ein Element $a \in K$ ist ein Quadrat genau dann, wenn $\operatorname{rv}(a)$ ein Quadrat in RV ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei K ein bewerteter Körper und sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad ≥ 2, das dem verallgemeinerten Eisensteinschen Irreduzibilitäts-Kriterium aus Korollar 1.6.6 entspricht (für die gegebene Bewertung auf K). Zeigen Sie, dass f nirgends eine Kollision hat.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Wir arbeiten in $K = \mathbb{C}((t))$. Geben Sie ein Beispiel für ein Polynom $f \in K[X]$ an, bei dem bei der in der Menge C aus Lemma 2.3.4 eine Nullstelle einer echten Ableitung von f benötigt wird. (Also anders ausgedrückt: f soll eine Kollision an einem Punkt $b \in K$ haben, so dass keine Nullstelle $c \in K$ von f existiert mit $\operatorname{rv}(b) = \operatorname{rv}(c)$.)

Anmerkung: Es ist möglich, f vom Grad 2 zu wählen und so, dass f selbst keine Nullstellen hat.

Aufgabe 4 (3+3+2 Punkte):

Sei K ein henselscher bewerteter Körper der Charakteristik $(0, 0)$, und sei $f = \sum_i a_i X^i \in K[X]$. Sei außerdem $b \in K$ so, dass f eine Kollision bei b hat.

Zeigen Sie:

(a) „Wenn man zum algebraischen Abschluss übergeht, kann man sich in Lemma 2.3.4 die Ableitungen sparen“: Es existiert eine Nullstelle $\alpha \in K^{\text{alg}}$ von f mit $\operatorname{rv}(b) = \operatorname{rv}(\alpha)$.
Hinweis: Es hilft, in K^{alg} zu arbeiten und f als Produkt von Linearfaktoren zu schreiben.

(b) Hat f genau $\ell \geq 1$ viele Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in K^{\text{alg}}$ mit $\operatorname{rv}(\alpha_i) = \operatorname{rv}(b)$, so hat die $(\ell - 1)$-te Ableitung $f^{(\ell-1)}$ eine Nullstelle $\beta \in K$ mit $\operatorname{rv}(\beta) = \operatorname{rv}(b)$.
Hinweis: Sie können dem Beweis von Lemma 2.3.4 folgen und schauen, wie es dort dazu kam, dass Ableitungen von f betrachtet wurden.

(c) Wir schreiben nun die Menge der Kollisionen von f in der Form $\operatorname{rv}^{-1}(\Xi)$, für eine (endliche) Teilmenge $\Xi \subseteq \text{RV}$. Wie groß kann Ξ maximal sein, wenn f keine Nullstelle (in K) hat?