# Modelltheorie II – Blatt 9

Abgabe am 13.6.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

**Aufgabe 1 (3 Punkte):**

Im Quantoren-Eliminationsbeweis wurde verwendet, dass sich die $n+1$-stellige Relation $\xi_1 + \cdots + \xi_n \approx \zeta$, für $\xi_i, \zeta \in \mathrm{RV}$, in der Sprache $L_{\mathrm{RV}}$ ohne VF-Quantoren ausdrücken lässt. Zeigen Sie genauer, dass die Relation äquivalent ist zu:

$$\exists \zeta_2, \dots, \zeta_n \in \mathrm{RV}\colon \xi_1 + \xi_2 \approx \zeta_2 \wedge \zeta_2 + \xi_3 \approx \zeta_3 \wedge \cdots \wedge \zeta_{n-1} + \xi_n \approx \zeta_n \wedge \zeta_n = \zeta$$

Hinweis: Elegant geht es, wenn man die Urbilder $\mathrm{rv}^{-1}(\xi_i)$ als Bälle in $K$ auffasst und Bälle addiert.

**Aufgabe 2 (3 Punkte):**

Sei $f \in K[X]$ und sei $C$ die Menge aller Ableitungsnullstellen von $f$. Zeigen Sie: Ist $B \subseteq K$ ein Ball, der disjunkt zu $C$ ist, so ist $x \mapsto \mathrm{rv}(f(x))$ konstant auf $B$.

Hinweis: Lemma 2.3.8 ist nützlich.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):**

Finden Sie eine VF-qf-Formel, die äquivalent ist zu $\phi(z, \zeta) = \exists x \in \mathrm{VF}\colon (x^2 + x + z = 0 \wedge \mathrm{rv}(x) = \zeta)$.

Anmerkung: Man könnte versuchen, dem Beweis von Satz 2.2.7 zu folgen, aber das wird vermutlich schrecklich aufwändig. Es ist vermutlich leichter, das von Hand zu machen (unter Verwendung der expliziten Lösungsformel für quadratische Gleichungen).

**Aufgabe 4 (5 Punkte):**

Verwenden Sie Lemma 2.4.1, um einen neuen Beweis von Quantorenelimination in algebraisch abgeschlossenen Körpern zu geben, in dem explizit beschrieben wird, wie der Existenzquantor in Formeln der Form

$$\phi(\underline{z}) = \exists x\colon \left( \bigwedge_{i \le m} f_i(x, \underline{z}) = 0 \wedge \bigwedge_{j \le n} g_j(x, \underline{z}) \neq 0 \right)$$

eliminiert werden kann, für Polynome $f_i, g_j \in \mathbb{Z}[x, \underline{z}]$.

Sie brauchen nicht alles im Detail aufzuschreiben; es reicht, wenn Sie den Beweis skizzieren.

Hinweis: Es ist leicht, sich auf den Fall $n = 1$ zu reduzieren. Mit Lemma 2.4.1 kann man sich dann auf den Fall $m = 1$ reduzieren. Und dann kann man nochmal Lemma 2.4.1 anwenden.