Th: 12.30

Modelltheorie II – Blatt 1

Abgabe am 18.4.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei K ein Körper, und sei $|\cdot|_\infty\colon K(t) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch: $|0|_\infty = 0$ und $|\frac{f}{g}|_\infty = 2^{\deg f - \deg g}$ für $f, g \in K[t] \setminus \{0\}$.

Zeigen Sie, dass $|\cdot|_\infty$ ein Betrag auf $K(t)$ ist. Ist er archimedisch?

Aufgabe 2 (2+1 Punkte):

Ergänzen Sie die folgenden Details zum Beweis von Satz 1.2.2 (über die Existenz der Vervollständigung eines Körper K mit Betrag $|\cdot|$):

(a) Zu Schritt (1) aus dem Beweisplan: Sind $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchy-Folgen in K, so ist auch ihr Produkt $(a_i \cdot b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(b) Zu Schritt (5) aus dem Beweisplan: Ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so existiert $\lim_{i\to\infty} |a_i|$.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte):

Sei K ein Körper und $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Betrag auf K. Zeigen Sie:

(a) Für $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$ gilt: $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

(b) „Jedes Dreieck ist gleichschenklig“: Für beliebige $x, y, z \in K$ gilt: Mindestens zwei der Beträge $|x-y|$, $|x - z|$ und $|y - z|$ sind gleich.

(c) „Jeder Punkt eines Balls ist Mittelpunkt des Balls“: Sei $x \in K$, $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sei $B := \{y \in K \mid |x - y| \leq r\}$ der Ball um x vom Radius r. Dann gilt für jedes $x' \in B$: $B = \{y \in K \mid |x' - y| \leq r\}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Sei K ein Körper und seien $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ zwei Beträge auf K. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) Für jede Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (mit $a_i \in K$) gilt: $\lim_{i\to\infty} |a_i|_1 = 0$ genau dann, wenn $\lim_{i\to\infty} |a_i|_2 = 0$.

(b) Für jedes $a \in K$ gilt: $|a|_1 < 1$ genau dann, wenn $|a|_2 < 1$.

(c) Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $a \in K$ gilt: $|a|_2 = |a|_1^\lambda$.

Ein möglicher Ansatz zu (b) $\Rightarrow$ (c): Betrachten Sie zu zwei gegebenen Elementen $a, b \in K$ die Beträge $|a^k \cdot b^\ell|_1$ und $|a^k \cdot b^\ell|_2$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Auf 7. 1) $|f| = 0 \iff f = 0$

2) $\left|\frac{f}{g}\right|_\infty \cdot \left|\frac{f'}{g'}\right|_\infty = \left(2^{\deg f - \deg g}\right)\left(2^{\deg f' - \deg g'}\right)$

$$= 2^{(\deg(f) + \deg f') - (\deg(g) - \deg g')}$$

$$= |fg|_\infty$$

$$\left|\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'}\right|_\infty = \left|\frac{fg' + f'g}{gg'}\right|_\infty = 2^{\deg(fg' + f'g) - \underbrace{\deg(gg')}_{= \deg g + \deg g'}}$$

$$\leq 2^{\deg(f) + \deg(g') - (\deg g + \deg g')}$$

$$= 2^{\deg(f) - \deg g} = \max\{|f/g|_\infty, |f'/g'|_\infty\}$$

O.E. $\deg(f) - \deg(g) \geq \deg(f') - \deg(g')$

$\iff$

$\deg(f) + \deg(g') \geq \deg(f') + \deg(g)$

Fun fact:

theorem: If $(k, |\ |)$ is a field with archemidian abs then k is a subfield of $(\mathbb{C}, |\ |)$.

$\mathbb{C}$ and its subfields are only fields that can be equiped with arch-absolute value!

2.a) $\forall \varepsilon > 0$

$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow \exists N_1 \quad \forall n,m > N_1 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

$(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \exists N_2 \quad \forall n,m > N_2 \quad |b_n - b_m| < \varepsilon$

$N = \max\{N_1, N_2\}$

$\forall n,m > N$

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_m b_n + a_m b_n - a_m b_m|$$

$$= |a_n b_n - a_m b_n| + |a_m b_n - a_m b_m|$$

$$= \underbrace{|b_n|}_{\leq B'} |a_n - a_m| + \underbrace{|a_m|}_{\leq A} |b_n - b_m|$$

Reminder: all Cauchy sequences are bounded.

For $\varepsilon = 1 \quad \exists M \quad \forall n,m \geq M \quad |x_n - x_M| < 1$

$\Rightarrow \quad |x_n| < |x_M| + 1 \quad \forall n \geq M$

$\Rightarrow \quad B = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_M| + 1\}$

$\Rightarrow \quad \forall n \quad |x_n| \leq B$

$$\leq B.\varepsilon + A.\varepsilon = (A+B).\varepsilon.$$

2.b) $\lim_{n \to +\infty} |a_n| < \infty$ $\qquad (|a_n|)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ $\xrightarrow{}$ complete.

for $\varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n, m \geq N$ $\quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

$$\big|\, |a_n| - |a_m| \,\big| \leq |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Real. $\qquad$ or field K.

$\Downarrow$

$(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ is cauchy sequence.

Fact: $\quad \big|\, |A| - |B| \,\big|_0 \leq |A \pm B|$

Hint: use $|-x| = |x|$

triangular inequality.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$$

Auf 3. a) O.E $|x| < |y|$

$$|x+y| \le \max\{|x|, |y|\} = |y|$$

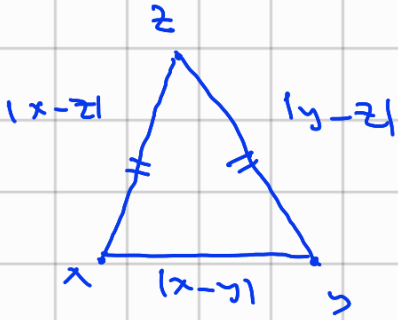
$|x+y| = |y|$ ✓

$$|y| = |x-y+y| \le \max\{|x+y|, |y|\}$$

$|x+y| < |y|$ ↯

$|x+y| > |y|$ ↯

3.b)



$$|x-z| = |x-y+y-z| \le \max\{|x-y|, |y-z|\}$$

If $|x-y| = |y-z|$ Done

Otherwise $|x-y| < |y-z|$

O.E

$$\Rightarrow \quad |x-z| = |y-z|$$

3.c) $b \in B(a,r) \Rightarrow B(a,r) = B(b,r)$

$x \in B(b,r)$

$\Rightarrow \quad |a-b| < r$

$|x-b| < r$

$$|a-x| = |a-b+b-x| \le \max\{|a-b|, |b-x|\} < r$$

$\Rightarrow \quad B(b,r) \subseteq B(a,r)$

other direction is similar.

Auf 4. $\quad a \Rightarrow b$

for all $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n|_1 = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} |a_n|_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$|a|_1 < 1 \iff |a|_2 < 1 \quad \forall a \in k.$$

$\exists \; a \in k \quad |a|_1 < 1$ but $|a|_2 \geq 1$

consider $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} |a^n|_1 = \lim_{n \to +\infty} |a|_1^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |a|_2^n = 0$$

$$\Rightarrow \underset{n \geq N}{|a|_2^n \leq 1} \rightarrow \underline{|a|_2 \leq 1}$$

$b \Rightarrow c)$

$|\alpha|_1 < 1 \iff |\alpha|_2 < 1$ (Hint)

$|\alpha|_1 > 1 \iff |\alpha|_2 > 1$

$|\alpha|_1 = 1 \longleftrightarrow |\alpha|_2 = 1$

for each α, β $\quad |\alpha^n \beta^m|_1 \substack{<\\=\\>} |\alpha^n \beta^m|_2 \substack{<\\=\\>} 1$

$$n \log |\alpha_1|_1 + m \log |\beta|_1 \substack{>\\=\\<} 0 \iff n \log |\alpha_2| + m \log |\beta|_2 \substack{>\\=\\<}$$

$$\Rightarrow \frac{\log |\alpha|_1}{\log |\beta|_1} \substack{>\\=\\>} \frac{m}{n} \iff \frac{\log |\alpha|_2}{\log |\beta|_2} \substack{>\\=\\<} \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\log |\alpha|_1}{\log |\beta|_1} = \frac{\log |\alpha|_2}{\log |\beta|_2} \Rightarrow \log |\beta_1|^{\log |\alpha|_2} = \log |\beta_2|^{\log |\alpha_1|}$$

$$\Rightarrow |\beta|_1 = |\beta|_2^{c}$$

$c \Rightarrow a)$ $\quad |\ \ |_2 = |\ \ |_1^{\lambda_1}$

$(a_n) \subseteq K$

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |a_n|_1^{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \lim |a_n|_2^{\lambda} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n|_2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |a_n|_1^{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(|a_n|_1^{n} \right)^{1/n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |a_n|_1 = 0$$