Modelltheorie II – Blatt 2

Abgabe am Mo, 29.4.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

Sei k ein beliebiger Körper. Schreiben Sie die folgenden Elemente von $k((t))$ in der Form $\sum_{i \geq N} a_i t^i$ (mit $N \in \mathbb{Z}$, $a_i \in k$):

(a) $\frac{1}{1-t^2}$

(b) $\frac{1}{(1-t)^2}$

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Aus der Analysis wissen wir: Nur, weil eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, bedeutet das noch nicht, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert. Wenn wir mit einem nicht-archimedischem Betrag arbeiten, ist das schöner:

Sei $(K, |\cdot|)$ ein vollständiger Körper mit nicht-archimedischem Betrag. (Gemeint ist: K soll vollständig bezüglich der von $|\cdot|$ induzierten Metrik sein.) Seien $a_i \in K$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die folgenden Ringisomorphismen existieren:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

(b) Ist $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p, so ist $\mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p \cong \{0\}$.

Aufgabe 4 (3+1 Punkte):

Manchmal werden die p-adischen Zahlen anders definiert als in der Vorlesung, nämlich: Erst definiert man $\mathbb{Z}_p$ als einen projektiven Limes (s. u.), und dann definiert man daraus $\mathbb{Q}_p$. In dieser Aufgabe wollen wir überprüfen, dass das mit unserer Definition übereinstimmt (bis auf Isomorphismus).

(a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei R_m ein Ring und $\pi_m \colon R_{m+1} \to R_m$ ein Ringhomomorphismus. Der *projektive Limes* dieser Ringe ist definiert als

$$\varprojlim_m R_m := \{(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \mid \forall m\colon a_m \in R_m \wedge \pi_m(a_{m+1}) = a_m\}$$

(Ein Element des projektiven Limes ist also eine Folge von Elementen $a_r \in G_r$, die „zusammenpassen" im Sinne der Abbildungen π_r.)
Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_p$ ist (als Ring) isomorph zum Projektiven Limes $\varprojlim_m \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, wobei $\pi_m \colon \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ die kanonische Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}_p$ der Brüchekörper von $\mathbb{Z}_p$ ist und als Ring sogar schon von $\mathbb{Z}_p \cup \{p^{-1}\}$ erzeugt wird.

Aufgabe 5 (3 Punkte):

Man könnte auf die Idee kommen, mit der Definition aus Aufgabe 4 auch die 10-adischen Zahlen zu definieren zu können: Sei

$$\mathbb{Z}_{10} := \varprojlim_m \mathbb{Z}/10^m\mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass dieser Ring nicht nullteilerfrei ist (so dass der Brüchekörper davon nicht existiert).

Hinweis: Hier sind zwei völlig verschiedene Lösungsansätze:

- Aus $\mathbb{Z}/10^m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/5^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ lässt sich $\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ herleiten.
- Wählen Sie Nullteiler $a_1 \cdot b_1 = 0$ in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass ein Paar $a_m \cdot b_m = 0$ in $\mathbb{Z}/10^m\mathbb{Z}$ sich „liften" lässt zu einem Paar $a_{m+1} \cdot b_{m+1} = 0$ in $\mathbb{Z}/10^{m+1}\mathbb{Z}$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT2-V-S24/

Auf 1. a) $\frac{1}{1-t^2} =$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots \Rightarrow \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (t^2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2}$$

$$\frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t} \qquad x = 1-t \quad dx = -dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t} = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{Log}\,(1-x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 + t + t^2 + \dots\right) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \dots$$

Auf 2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \left(\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0\right)$

$\Rightarrow$ clear.

$\Leftarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \qquad S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$

$$a_n = S_{n+1} - S_n$$

Remark: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is Cauchy sequence. $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$

If $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is Cauchy $\Rightarrow \lim_{m,n\to+\infty} |a_m - a_n| = 0$ for $m = n+1$. (

$\downarrow$

It's true for Cauchy seq in metric spaces.

[the converse is not true in $\mathbb{R}$, Give a counter example]

for $\varepsilon > 0$, $\exists N$ $\forall n > N$ $\quad |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$

Now, take $m > n > N$ $\quad |a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m+1} - a_{m-2} + \dots - a_n|$

$\leq \max \{ |a_m - a_{m-1}|, \dots, |a_{n+1} - a_n| \} < \varepsilon$

$\Rightarrow a_n = s_{n+1} - s_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |s_{n+1} - s_n| = \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \{s_n\}$ is a cauchy seq

$\Downarrow$

As $(K, |.|)$ is complete then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

Auf 3) a) $\frac{\mathbb{Z}_p}{p^n \mathbb{Z}_p} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p^n \mathbb{Z}}$ Bem 1.2.8) $\mathbb{Z}_p = \{ \sum_{i\geq 0} r_i p^i \mid r_i \in \{0, \dots, p-1\} \}$

$r_0 + r_1 p + r_2 p^2 + \dots r_{n-1} p^{n-1} + p^n \mathbb{Z}_p \longmapsto r_0 + r_1 p + \dots + r_{n-1} p^{n-1}$

$\frac{\mathbb{Z}_p}{q \mathbb{Z}_p} \cong 0$

$(p, q) = 1$ with out loss of generality assume $q = 1, 2, \dots, p-1$

from algebra remember $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ $[m]$ is generator $\Leftrightarrow (m, n) = 1$

$\Rightarrow$ It's not hard to see that $q\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$

$r_0, r_0 + r_1 p, r_0 + r_1 p + r_2 p \in \{0, 1, \dots, p-1\}$

can be generated by either q, $q + q$, $\dots$, $\underbrace{q + \dots + q}_{p\text{-times}}$
or or or

Auf4.a) $\varprojlim_m \frac{\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}}$ $\quad \pi_m : \frac{\mathbb{Z}}{p^{m+1}\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}}$

$$\parallel$$

$$\left\{ (a_m)_{m\in\mathbb{Z}} \;\middle|\; \forall a_m \in \frac{\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}} \wedge \pi_m(a_{m+1}) = a_m \right\}$$

$$(a_m) \longrightarrow \lim_{m\to+\infty} a_m = a$$

$$\pi(a_{m+1}) = a_m \Rightarrow \quad p^m \mid \pi(a_{m+1}) - a_m \Rightarrow$$

$$|a_{m+1} - a_m| < p^{-m}$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty} |a_{m+1} - a_m| = 0$$

representative of corresponding equivalence classes

$$\Downarrow$$

(a_m) is a cauchy sequence.

$$\lim_{m\to+\infty} a_m = a \overset{?}{\in} \mathbb{Z}_p$$

$$a_i \in \frac{\mathbb{Z}}{p^i\mathbb{Z}} \Rightarrow |a_i| \leq p^{-i} \leq 1$$

$$a = \sum_{i\geq 0} a_i p^i \Rightarrow \quad S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$$

$$\downarrow$$

$$\pi_n(S_{n+1}) = S_n$$

$$\Rightarrow (S_n) \in \varprojlim_m \frac{\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}}$$

Part b) $\mathbb{Q}_p = \text{frac}(\mathbb{Z}_p) = \langle \mathbb{Z}_p \cup \{p^{-1}\} \rangle$

Remark: let R is complete with respect to $|,|$, $x \in R$ such that $|x| < 1$ then

$\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ exists in R, and $(1-x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1$

Any p-adic number can be writen in a unique way as

up^k such that u invertable..

$k \geq 0$ (minimum).

in particular. $\frac{r}{s} = \frac{r}{up^k} = \frac{u^{-1}r}{p^k}$

write $u^{-1}r = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$

Auf 5. $\mathbb{Z}_{10} = \varprojlim_m \frac{\mathbb{Z}}{10^m \mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$

$a =$ $\dots a_3 a_2 a_1 2$

$b -$ $\dots b_3 b_2 b_1 5$

It's necessary that all digits of ab be zero, therefore we must to satisfy the following condition for successive condition.

$10 \mid 2b_1 + 5a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = 1,\ b_1 = 2$

$10 \mid 2b_2 + 5a_2 + a_1 b_1 + 1 \Rightarrow 10 \mid 2b_2 + 5a_2 + 2 + 1 \Rightarrow$

$b_2 = 1 \quad a_2 = 1$

$10 \mid 2b_3 +$

$\dots 112$ $\quad 2 + 10 + 10^2$

$\dots 125$ $\quad 5 + 2 \times 10 + 10^2$

this process can continue indefinitly.

$$\frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

$$\mathbb{Z}_{10} = \varprojlim_m \frac{\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}} = \left\{ (a_n) : a_n \in \frac{\mathbb{Z}}{10^m\mathbb{Z}},\ \pi_m(a_{m+1}) = a_m \right\}$$

$\downarrow$

$$(b_n, c_n) : b_n \in \frac{\mathbb{Z}}{2^n\mathbb{Z}},\ c_n \in \frac{\mathbb{Z}}{5^n\mathbb{Z}}$$

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{\mathbb{Z}}{10^{m+1}\mathbb{Z}} \arrow[r, "\overset{\text{Canonical.}}{\pi^{10}_{m}}"] \arrow[d, "\cong"] & \dfrac{\mathbb{Z}}{10^{m}\mathbb{Z}} \arrow[d, "\cong"] \\
\dfrac{\mathbb{Z}}{2^{m+1}\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{5^{m+1}\mathbb{Z}} \arrow[r, "{(\pi^{2}_{m+1},\, \pi^{5}_{m+1})}"', "\text{Canonical.}"' near end] & \dfrac{\mathbb{Z}}{2^{m}\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{5^{m}\times\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$$

$2 + 5\mathbb{Z} \qquad 1 + 2\mathbb{Z} \longmapsto \qquad 7 + 10\mathbb{Z}$