Modelltheorie II – Blatt 3

Abgabe am 2.5.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei (K, v) ein bewerteter Körper, sei $f \in K[X]$ ein Polynom und sei $a \in K$. Zeigen Sie, dass eine Umgebung U von a in K existiert (also z. B. ein offener Ball) so dass gilt:

- Ist a keine Nullstelle von f, so ist $b \mapsto v(f(b))$ konstant auf U.
- Ist a eine d-fache Nullstelle von f, so ist $v(f(b)) = d \cdot v(b - a)$ $+ \underset{\downarrow}{\gamma}$ für alle $b \in U$.

constant.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte):

Sei (K, v) ein bewerteter Körper.

(a) Zeigen Sie, dass auf dem Körper $K(X)$ der rationalen Funktionen eine Bewertung $v_{\text{Gauß}}$ existiert mit $v_{\text{Gauß}}(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \min\{v(a_0), \ldots, v(a_n)\}$. (Man nennt dies die *Gauß-Bewertung* auf $K(X)$.)

(b) Sei $f \in \mathcal{O}_K[X]$ ein Polynom, das sich als Produkt von zwei Polynomen $g_1, g_2 \in K[X]$ schreiben lässt. Zeigen Sie, dass sich f dann auch als Produkt von Polynomen $h_1, h_2 \in \mathcal{O}_K[X]$ schreiben lässt mit $\deg h_1 = \deg g_1$ und $\deg h_2 = \deg g_2$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

copy of Immi's proof but just for (A_f, FA_f] & is 'nr'.

Sei R ein ufd faktorieller Ring und $K := \operatorname{Frac} R$ sein Brüchekörper.

(a) Zeigen Sie: R ist der Schnitt von (möglicherweise unendlich vielen) Bewertungsringen von K. Hinweis: Verwenden Sie die irreduziblen Elemente von R.

(b) In der Algebra-Vorlesung wurde gezeigt: Ist $f \in R[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad ≥ 1, so ist f auch als Polynom über K irreduzibel. Geben Sie einen neuen Beweis davon unter Verwendung von (a) und ~~Aufgabe 1.~~ Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte):

Sei K ein algebraisch abgeschlossener bewerteter Körper. Zeigen Sie:

(a) Die Wertegruppe Γ ist divisibel.

(b) Der Restklassenkörper $\bar{K}$ ist auch algebraisch abgeschlossen.

a is not root of $f \Rightarrow \exists\ B_a(r)\quad \forall b \in B_a(r)\quad b \longrightarrow v(f(b))$ constant.

$\forall r > 0\quad \exists b \in B_a(r)\quad v(f(a)) \neq v(f(b))$

$$f \in k[x] \Rightarrow O.\epsilon \quad \underset{a_0 \neq 0}{\overset{a=0}{f \in O[x]}} \quad f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$v(f(b)) \geqslant \min \{v(a_0), v(a_1) + v(b), \ldots, v(a_n) + nv(b)\}$$

a is not a root $\Rightarrow v(b) >> 0 \Rightarrow$ $\quad v(a_n) + nv(a)\}$

$$v(f(b)) = v(a_0)$$

Part b) a is a root with multiplicity d. $\quad O.\epsilon:\ a = 0$

$$\Rightarrow f = a_0 x^d + a_1 x^{d+1} + \cdots + a_n x^n \Rightarrow f = x^d(\underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots}_{g} a_n x^{n-d})$$

$v(f(b)) = d\,v(b) + v(g(b))$

we can find ball u around $a=0$ s.t $v(g(b))$ is constant for $b \in u$.

$\Rightarrow v(f(b)) = d\,v(b) + \gamma.$

Auf 2.a) $v(f) = \infty \iff f = 0$

$v(f.g) = v(f) + v(g)$ for all $f, g \in k[x]$

$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$

let i_0 be minimal such that $v(f) = v(a_{i_0})$

— j_0 ——— " ——— $v(g) = v(b_{j_0})$

$f.g =: \sum_k c_k x^k$

Coefficient of $x^{i_0+j_0}$ of $f.g$ is $\sum_{\substack{i,j \\ i+j = i_0+j_0}} a_i b_j := c_{i_0+j_0}$

$$v(c_{i_0+j_0}) \overset{(*)}{\geq} \min_{\substack{i,j \\ i+j=i_0+j_0}} v(a_i b_j) = v(a_{i_0}) + v(b_{j_0})$$

$$v(a_i b_j) = v(a_i) + v(b_j)$$

between $a_i b_j$ in the summand, $a_{i_0} b_{j_0}$ is the only one with minimal valuation.

case: $i < i_0$ $\left. \begin{array}{l} v(a_i) > v(a_{i_0}) \\ v(b_j) \geq v(b_{j_0}) \end{array} \right\} \; v(a_i b_j) > v(a_{i_0} b_{j_0})$.

case: $i > i_0$, $j < j_0$ analog of above case!

at least i or j should be less than i_0 or j_0

$$\Rightarrow \quad v(c_{i_0+j_0}) = v(a_{i_0}) + v(b_{j_0}) = v(f) + v(g)$$

$$v(c_k) \geq \min_{i,j} v(a_i b_j) \geq v(f) + v(g)$$

$\Rightarrow$

$$v(fg) = v(f) + v(g)$$

$$v\left(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}\right) \geq \min \left\{ v\left(\frac{f_1}{g_1}\right), v\left(\frac{f_2}{g_2}\right) \right\}$$

the Proof can be reduced to

$$v(f_1 + f_2) \geq \min \{ v(f_1), v(f_2) \}$$

$$f_i = \sum a_{ij} x^j$$

$$v(f_1 + f_2) = \min_j \left(v(a_{1j} + a_{2j}) \right)$$

$$\geq \min \{ v(a_{1j}), v(a_{2j}) \}$$

$$\geq v(f_1) \quad \geq v(f_2)$$

Auf 2.b) $f \in \mathcal{O}_k[x]$ $\quad f = g_1 \cdot g_2 \quad g_1, g_2 \in k[x]$

$v_{gauss}(f) \geq 0 \quad v_{gauss}(g_1 g_2) \geq 0$

$v_{gauss}(g_1) + v_{gauss}(g_2) \geq 0 \rightsquigarrow$ both can not be negative.

O.E. assume $v_{gauss}(g_1) < 0 \Rightarrow \exists\, a$ such that $v(a g_1) = 0$

$* \; -v(g_1) \leq v(g_2)$

$$v(a g_1 \cdot a^{-1} \cdot g_2) = v(f)$$

$$\underbrace{a g_1}_{h_1}, \ \underbrace{a^{-1} \cdot g_2}_{h_2} \in \mathcal{O}_K[x].$$

$\deg h_1 = \deg g_1$

$\deg h_2 = \deg g_2$

Auf 3. a) R is UFD then each $r \in R$, can be written as

$$r = u p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

Let p be an irr-element, then

$$v_p(\underbrace{p^r \tfrac{m}{n}}_{a}) = r \qquad v(a) \geq 0$$

Consider $\mathcal{O}_p = \{ a \in K \mid v(a) \geq 0 \}$

$$R = \bigcap_p \mathcal{O}_p$$

$R \subseteq \bigcap_p \mathcal{O}_p$ clear.

$a \in \bigcap_p \mathcal{O}_p \Rightarrow$

$a = \frac{m}{n}$

$(m,n) = 1 \Rightarrow$ there exist some primes in n which are not in m

$\Rightarrow$ if $n \neq 1$ then $a \notin \mathcal{O}_p$ for some p

$\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \underline{a \in R}$ |

Auf 3. b) $f \in R[x]$, f is irr in R

$f = g \cdot h \qquad g, h \in k[x]$

$R = \bigcap \mathcal{O}_p \Rightarrow v_G(f) \geq 0$

Fix p_j from irr elements that appear in decomposition of coeficient of f.

$v_G(f) = v_G(g) + v_G(h) \geq 0$

Find s_j and p_j such that

$v_G(p_j^{s_j} g)$, $v_G(p_j^{-s_j} h) \geq 0$ (same as above)

$\tilde{g} = g \cdot \prod p_j^{s_j} \qquad \tilde{h} = h \cdot \prod p_j^{-s_j}$ → for other p always we have $v_G(\tilde{h}), v_G(\tilde{g}) \geq 0$

$v_G(\tilde{g}) \geq 0$
$v_G(\tilde{h}) \geq 0$ $\Rightarrow$ $\tilde{g}, \tilde{h} \in R[x]$

Auf 4.a) $\gamma \in \Gamma'$, Consider $a \in k$ such that $v(a) = \gamma$

let $f(x) = x^n - a$ $\Rightarrow$ As $k \models ACF$ then there exist

$b \in k$ such that $b^n - a = 0$ $\Rightarrow$ $n v(b) = \gamma$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\gamma}{n} \in \Gamma$

Auf 4.b) $\bar{f}(x) \in k[x]$ $\Rightarrow$ we can consider $f(x) \in \mathcal{O}[x]$

As $K \models ACF$, $\exists b$: $f(b) = 0$ then as res is endomorphism

than $\bar{b}$ is root of $\bar{f}(x)$.