

Kurzskript Modelltheorie II

Immi Halupczok

11. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

Modelltheorie II	2
1 Bewertete Körper	2
1.1 Beträge	2
1.2 Vervollständigung	3
1.3 Bewertete Körper	4
1.4 Bewertungsringe	5
1.5 Fortsetzung von Bewertungen	6
1.6 Newton-Polygone	6
1.7 Henselsche Körper	7
1.8 Anwendung auf diophantische Gleichungen	8
2 Quantorenelimination in bewerteten Körpern	9
2.1 Leitterme	9
2.2 Quantorenelimination: Die Aussagen	10
2.3 Polynome und rv	11
2.4 Beweis von Quantorenelimination	12
2.5 Der Satz von Ax-Kochen/Ershov und andere Folgerungen	13
3 Geometrie in $\text{HEN}_{0,0}$	14
3.1 Dimension	14
3.2 Zerlegung in krumme Quader	15
3.3 Messen in \mathbb{Q}_p	17
3.4 Presburger-Mengen	18
3.5 Rationalität von L_{DP} -Poincaré-Reihen	19

Modelltheorie II

1 Bewertete Körper

1.1 Beträge

Definition 1.1.1 Sei K ein Körper. Ein **Betrag** auf K ist eine Abbildung $|\cdot|: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:

- (a) $|a| = 0 \iff a = 0$
- (b) $|ab| = |a| \cdot |b|$
- (c) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (**Dreiecksungleichung**).

(Manchmal nennt man das auch eine **Norm** auf K ; es gibt aber auch etwas anderes, was man einen Norm auf einem Körper nennt.)

Beispiel 1.1.2 Auf $K \subseteq \mathbb{R}$: der normale Absolutbetrag: $|a|_{\mathbb{R}} = a$ falls $a \geq 0$ und $|a|_{\mathbb{R}} = -a$ falls $a \leq 0$.

Beispiel 1.1.3 Auf $K \subseteq \mathbb{C}$: der komplexe Betrag: $|a + ib|_{\mathbb{C}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.1.4 Der **triviale Betrag** auf einem beliebigen Körper K : $|0|_0 = 0$, $|a|_0 = 1$ für $a \in K^\times$.

Bemerkung 1.1.5 Es gilt: $|1| = 1$; $|a| = |-a|$; $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$ für $a \in K^\times$.

Definition 1.1.6 Ein Betrag $|\cdot|$ heißt **nicht-archimedisch**, wenn die **ultrametrische Dreiecksungleichung** gilt:

$$|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$$

Sonst heißt $|\cdot|$ **archimedisch**.

Beispiel 1.1.7 Sei R ein faktorieller Ring, $K = \text{Frac } R$, und sei $p \in R$ ein irreduzibles Element. Dann lässt sich jedes Element $a \in K^\times$ schreiben in der Form $a = p^r \cdot \frac{m}{n}$, mit $m, n \in R$ nicht durch p teilbar und $r \in \mathbb{Z}$ beliebig. Sei außerdem s eine beliebige reelle Zahl größer als 1. Dann wird durch $|a|_p := s^{-r}$ (und $|0|_p := 0$) ein (nicht-archimedischer) Betrag auf K definiert. Man nennt dies den **p -adischen Betrag** (oder die **p -adische Norm**).

Bemerkung 1.1.8 Ist $R = \mathbb{Z}$ und p eine Primzahl, so ist es üblich, $s = p$ zu wählen, d. h. der p -adische Betrag auf \mathbb{Q} ist $|a|_p := p^{-r}$.

Satz 1.1.9 (Satz von Ostrowski) Die einzigen Beträge auf \mathbb{Q} sind der triviale, $x \mapsto |x|_{\mathbb{R}}^\lambda$ für $\lambda \in (0, 1]$, und $x \mapsto |x|_p^\lambda$ für $\lambda \in (0, \infty)$ und p prim.

Lemma 1.1.10 Sei K ein Körper mit einem Betrag $|\cdot|$, und sei $A := \{|n \cdot 1| \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Ist $|\cdot|$ archimedisch, so ist A unbeschränkt. (Inbesondere hat K Charakteristik 0.) Ist $|\cdot|$ nicht-archimedisch, so ist $A \subseteq [0, 1]$.

Beispiel 1.1.11 Ist k ein beliebiger Körper, $R = k[t]$, $a \in k$ und $f = t - a$, so gilt für $q \in k(t) = \text{Frac } R$: Ist $|q|_f = 2^r$, so hat q eine r -fache Nullstelle bei a , wobei Polstellen als negative Nullstellen angesehen werden.

1.2 Vervollständigung

Lemma 1.2.1 Sei K ein Körper und $|\cdot|$ ein Betrag auf K . Dann ist $d(a, b) := |a - b|$ eine Metrik auf K . Addition, Multiplikation, $x \mapsto -x$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ (für $x \neq 0$) sind stetig bezüglich der von dieser Metrik induzierten Topologie.

Satz 1.2.2 Sei K ein Körper mit einem Betrag $|\cdot|$, und sei \hat{K} die Vervollständigung von K bezüglich der von $|\cdot|$ induzierten Metrik. Dann lassen sich die Addition, die Multiplikation und der Betrag von K auf eindeutige Weise stetig auf \hat{K} fortsetzen, und \hat{K} wird auf diese Art auch ein Körper mit Betrag.

Beispiel 1.2.3 Die Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ ist \mathbb{R} .

Definition 1.2.4 Sei p eine Primzahl. Der Körper \mathbb{Q}_p der p -adischen Zahlen ist die Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich des p -adischen Betrags.

Korollar 1.2.5 (zum Satz von Ostrowski) Die Vervollständigungen von \mathbb{Q} bezüglich beliebigen Beträgen auf \mathbb{Q} sind: \mathbb{Q} selbst (wenn der Betrag trivial ist); \mathbb{R} ; und \mathbb{Q}_p für alle Primzahlen p .

Satz 1.2.6 Sei p eine Primzahl.

- (a) Seien $r_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Wir nehmen an, dass ein $N \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $r_i = 0$ für alle $i < N$ ist. Dann konvergiert die Folge

$$a_m := \sum_{i=N}^m r_i p^i$$

bezüglich der p -adischen Norm gegen ein Element

$$a := \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i p^i := \lim_{m \rightarrow \infty} a_m$$

aus \mathbb{Q}_p . Ist N minimal mit $r_N \neq 0$, so ist $|a|_p = p^{-N}$.

- (b) Jedes Element $a \in \mathbb{Q}_p$ lässt sich auf eindeutige Weise als ein solcher Limes schreiben.

Definition 1.2.7 Die **ganzen p -adischen Zahlen** sind definiert als $\mathbb{Z}_p := \{a \in \mathbb{Q}_p \mid |a|_p \leq 1\}$.

Bemerkung 1.2.8 Es gilt $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{i \geq 0} r_i p^i \mid r_i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ für alle } i\}$, wobei der Grenzwert in \mathbb{Q}_p berechnet wird.

Bemerkung 1.2.9 \mathbb{Z}_p ist ein Unterring von \mathbb{Q}_p .

Satz 1.2.10 \mathbb{Z}_p ist der topologische Abschluss von \mathbb{Z} in \mathbb{Q}_p .

Definition 1.2.11 Sei k ein Körper. Die Menge der **formalen Laurent-Reihen** über k ist definiert als die Menge der formalen Summen der Form

$$k((t)) := \left\{ \sum_{i \geq N} r_i t^i \mid N \in \mathbb{Z}, \forall i: r_i \in k \right\}.$$

Die Summe und das Produkt von zwei solchen Reihen sind so definiert, wie man es bei Reihen erwartet. Der (t -adische) Betrag einer formalen Reihe $a = \sum_{i \geq N} r_i t^i \in k((t))$ mit $r_N \neq 0$ ist $|a|_t := 2^{-N}$. (Und: $|0|_t := 0$.) Die **formalen Potenzreihen** sind

$$k[[t]] := \{a \in k((t)) \mid |a|_t \leq 1\} = \left\{ \sum_{i \geq 0} r_i t^i \mid \forall i: r_i \in k \right\}.$$

Satz 1.2.12 $k((t))$ ist die Vervollständigung von $k(t)$ bezüglich des t -adischen Betrags aus Beispiel 1.1.11; insbesondere ist $k((t))$ ein Körper. Die Teilmenge $k[[t]]$ bildet einen Unterring, und sie ist der topologische Abschluss von $k[t]$ in $k((t))$.

1.3 Bewertete Körper

Definition 1.3.1 Eine **angeordnete abelsche Gruppe** ist eine abelsche Gruppe Γ mit Ordnungsrelation $<$, so dass für alle $\alpha, \alpha', \beta \in \Gamma$ gilt: $\alpha < \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha' + \beta$.

Beispiel 1.3.2 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

Bemerkung 1.3.3 Angeordnete abelsche Gruppen sind torsionsfrei.

Definition 1.3.4 Sei K ein Körper. Eine **Bewertung** auf K ist eine Abbildung $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, wobei Γ eine angeordnete abelsche Gruppe ist, so dass für alle $a, b \in K$ gilt:

- $v(a) = \infty \iff a = 0$
- $v(ab) = v(a) + v(b)$
- $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Ein Körper mit Bewertung heißt **bewerteter Körper**. Γ heißt **Wertegruppe**.

Zwei Bewertungen $v: K \rightarrow \Gamma$, $v': K \rightarrow \Gamma'$ heißen **äquivalent**, wenn ein ordnungserhaltender Gruppenisomorphismus $\alpha: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ existiert mit $v' = \alpha \circ v$.

Bemerkung 1.3.5 Ist (K, v) ein bewerteter Körper mit Wertegruppe $\Gamma \subseteq (\mathbb{R}, +)$, so wird durch $|x| := 2^{-v(x)}$ ein nicht-archimedisches Betrag auf K definiert. Ist umgekehrt $|\cdot|$ ein nicht-archimedisches Betrag auf einem Körper K , so erhält man eine Bewertung $v(x) := -\log(|x|)$ auf K , deren Wertegruppe eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist.

Beispiel 1.3.6 Den p -adischen Beträgen aus Beispiel 1.1.7 entsprechen jeweils p -adische Bewertungen (mit Wertegruppe \mathbb{Z}): Ist R ein faktorieller Ring, $K = \text{Frac } R$ und $p \in R$ irreduzibel, so ist die p -adische Bewertung auf K definiert durch $v_p(p^r \cdot \frac{m}{n}) = r$, für $r \in \mathbb{Z}$ und $m, n \in R$ nicht durch p -teilbar.

Bemerkung 1.3.7 Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Dann gilt für $a, b \in K$:

- (a) $v(1) = 0$; $v(-a) = v(b)$; $v(\frac{1}{a}) = -v(a)$
- (b) Ist $v(a) \neq v(b)$, so ist $v(a + b) = \min\{v(a), v(b)\}$.
- (c) Sind $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, so tauch die minimale Bewertung mehrfach auf, d. h. es existieren $j \neq j'$ mit $v(a_j) = v(a_{j'}) = \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$.

Definition 1.3.8 Sei (K, v) ein bewerteter Körper mit Wertegruppe Γ .

- (a) Ein **offener Ball** in K ist eine Teilmenge der Form $B_{>\gamma}(a) := \{x \in K \mid v(x - a) > \gamma\}$ für $a \in K, \gamma \in \Gamma$.
- (b) Ein **abgeschlossener Ball** in K ist eine Teilmenge der Form $B_{\geq\gamma}(a) := \{x \in K \mid v(x - a) \geq \gamma\}$ für $a \in K, \gamma \in \Gamma$.
- (c) Die **Bewertungs-Topologie** auf K ist die Topologie mit den offenen Bällen als Basis.

Bemerkung 1.3.9 (a) „Jeder Punkt eines Balls ist Mittelpunkt des Balls“:

Für $b \in B_{>\gamma}(a)$ beliebig gilt $B_{>\gamma}(a) = B_{>\gamma}(b)$; und analog für abgeschlossene Bälle.

- (b) Sind $B_1, B_2 \subseteq K$ zwei Bälle, so ist entweder einer der Bälle im anderen enthalten oder $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Bemerkung 1.3.10 Ist $B \subseteq K$ ein offener oder abgeschlossener Ball, so ist B topologisch offen und abgeschlossen.

1.4 Bewertungsringe

Lemma 1.4.1 Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Dann gilt:

- (a) $\mathcal{O}_K := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ ist ein Unterring von K .
- (b) Die Einheiten dieses Rings sind $\mathcal{O}_K^\times = \{a \in K \mid v(a) = 0\}$.
- (c) $\mathcal{M}_K := \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ ist das einzige maximale Ideal von \mathcal{O}_K .

Definition 1.4.2 Den Ring \mathcal{O}_K aus Lemma 1.4.1 nennt man den **Bewertungsring** von v . Den Quotient $\bar{K} := \mathcal{O}_K / \mathcal{M}_K$ nennt man den **Restklassenkörper**. Die Abbildung $\mathcal{O}_K \rightarrow \bar{K}$ heißt **Restklassenabbildung** und wird mit res bezeichnet (und manchmal auch als $a \mapsto \bar{a}$ geschrieben).

Beispiel 1.4.3 (a) Ist $K = k((t))$, so ist $\mathcal{O}_K = k[[t]]$, $\mathcal{M}_K = tk[[t]]$, $\bar{K} = k$ und $\text{res}(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i t^i) = r_0$.

(b) Ist $L = \mathbb{Q}_p$, so ist $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p$, $\mathcal{M}_K = p\mathbb{Z}_p$, $\bar{K} = \mathbb{F}_p$ und $\text{res}(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i p^i) = r_0$.

Bemerkung 1.4.4 Eine Bewertung auf einem Körper K ist (bis auf Äquivalenz) eindeutig durch den Bewertungsring \mathcal{O}_K festgelegt: Die Bewertung ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von K^\times nach Γ mit Kern \mathcal{O}_K^\times ; es gilt also $\Gamma \cong K^\times / \mathcal{O}_K^\times$. Außerdem ist die Ordnung auf Γ dadurch festgelegt, dass $v(a) \geq 0$ genau dann, wenn $a \in \mathcal{O}_K$ ist.

Definition 1.4.5 Ein (abstrakter) **Bewertungsring** von einem Körper K ist ein Unterring $R \subseteq K$, so dass gilt: Für alle $a \in K$ ist $a \in R$ oder $\frac{1}{a} \in R$.

Bemerkung 1.4.6 Ist K ein bewerteter Körper, so ist der Bewertungsring \mathcal{O}_K insbesondere ein abstrakter Bewertungsring.

Satz 1.4.7 Jeder abstrakte Bewertungsring eines Körpers K ist der Bewertungsring einer Bewertung auf K .

Beispiel 1.4.8 Ist $\mathbb{R}^* \succ \mathbb{R}$ eine elementare Erweiterung, so können wir auf \mathbb{R}^* eine Bewertung definieren, die die Größenordnung von Elementen misst. Es ist die Bewertung, die als Bewertungsring die Menge der „endlichen“ Zahlen hat: $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^*} := \{a \in \mathbb{R}^* \mid \exists b \in \mathbb{R}: |a|_{\mathbb{R}} < b\}$. Der Restklassenkörper zu dieser Bewertung ist \mathbb{R} .

Definition 1.4.9 Sei K ein bewerteter Körper und \bar{K} sein Restklassenkörper. Man sagt, K hat **Charakteristik** (p, q) , wenn $\text{char } K = p$ und $\text{char } \bar{K} = q$ ist. Ist $q = p$, so sagt man auch, K hat **Äquicharakteristik** p . Ist $q \neq p$, so sagt man, K hat **gemischte Charakteristik**.

Bemerkung 1.4.10 Als Charakteristiken von bewerteten Körpern können auftreten: $(0, 0)$, $(0, p)$ und (p, p) , für Primzahlen p .

1.5 Fortsetzung von Bewertungen

Definition 1.5.1 Seien (K_1, v_1) und (K_2, v_2) bewertete Körper mit $K_1 \subseteq K_2$ und seien Γ_1 und Γ_2 die entsprechenden Wertegruppen. Wir nennen v_2 eine **Fortsetzung** von v_1 (auf K_2), wenn v_1 äquivalent ist zur Einschränkung $v_2|_{K_1}$.

Bemerkung 1.5.2 Nach Bemerkung 1.4.4 ist das äquivalent zu: $\mathcal{O}_{K_1} = \mathcal{O}_{K_2} \cap K_1$. Außerdem gilt dann auch $\mathcal{O}_{K_1}^\times = \mathcal{O}_{K_2}^\times \cap K_1$ und $\mathcal{M}_{K_1} = \mathcal{M}_{K_2} \cap K_1$, und man erhält eine natürliche Einbettung $\bar{K}_1 \subseteq \bar{K}_2$.

Satz 1.5.3 Ist $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, so lässt sich jede Bewertung auf K zu einer Bewertung auf L fortsetzen.

1.6 Newton-Polygone

Im folgenden sei K ein bewerteter Körper mit Wertegruppe Γ und $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \{\frac{\gamma}{n} \mid \gamma \in \Gamma, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ die divisible Hülle von Γ .

Definition 1.6.1 Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$. Das **Newton-Polygon** von f ist der Streckenzug durch die Punkte $(\ell, \text{NP}_f(\ell)) \in \mathbb{N} \times \Gamma_{\mathbb{Q}}$, für $0 \leq \ell \leq n$, wobei

$$\text{NP}_f(\ell) = \min \left\{ v(a_\ell), \min_{i < \ell, j > \ell} \frac{(\ell - i)v(a_j) + (j - \ell)v(a_i)}{j - i} \right\}.$$

Aufeinanderfolgende Teilstrecken, die auf einer Geraden liegen, nennt man ein **Segment** des Newtonpolygons.

Satz 1.6.2 Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n . Wir setzen die Bewertung von K auf beliebige Weise auf K^{alg} fort und schreiben $f = a_n \cdot \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$, mit $\alpha_i \in K^{\text{alg}}$ und $v(\alpha_1) \geq v(\alpha_2) \geq \dots \geq v(\alpha_n)$. Dann ist $\text{NP}_f(\ell) = v(a_n) + \sum_{i>\ell} v(\alpha_i)$ für $\ell = 0, \dots, n$; oder anders ausgedrückt: $v(\alpha_\ell) = \text{NP}_f(\ell) - \text{NP}_f(\ell + 1)$ für $\ell = 1, \dots, n$.

Korollar 1.6.3 Ist $f \in \mathcal{O}_K[X]$ ein normiertes Polynom, so liegen alle Nullstellen von f in \mathcal{O}_K .

Korollar 1.6.4 Wenn wir die Bewertung von K auf beliebige Weise auf K^{alg} fortsetzen, so hat diese Fortsetzung als Wertegruppe $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Korollar 1.6.5 Sind $f, g \in K[X]$ Polynome vom Grad n und m und ist $h = f \cdot g$, so lässt sich NP_h wie folgt aus NP_f und NP_g bestimmen:

- $\text{NP}_h(m+n) = \text{NP}_f(n) + \text{NP}_g(m)$
- Die Segmente von NP_h sind genau die Segmente von NP_f und die Segmente von NP_g , so sortiert, dass NP_h konvex ist; also formal: Ist $\lambda_i = \text{NP}_f(i) - \text{NP}_f(i-1)$ für $i = 1, \dots, n$, und analog $\mu_i = \text{NP}_g(i) - \text{NP}_g(i-1)$ und $\nu_i = \text{NP}_h(i) - \text{NP}_h(i-1)$, so erhält man die Folge ν_1, \dots, ν_{m+n} , indem man die Folge $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ aufsteigend sortiert.

Korollar 1.6.6 (Verallgemeinertes Eisensteinsches Irreduzibilitäts-Kriterium) Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n über einem Körper K . Wenn eine Bewertung auf K existiert, so dass $\text{NP}_f(\ell) \notin \Gamma$ für $1 \leq \ell \leq n-1$ gilt, so ist f irreduzibel.

1.7 Henselsche Körper

Definition 1.7.1 Ein bewerteter Körper K heißt **henselsch**, wenn gilt: Sind $f \in \mathcal{O}_K[X]$ und $a \in \mathcal{O}_K$ mit $v(f(a)) > 0$ und $v(f'(a)) = 0$, so existiert (mindestens) ein $a_0 \in \mathcal{O}_K$ mit $f(a_0) = 0$ und $v(a_0 - a) > 0$.

Satz 1.7.2 (Hensels Lemma) Sei K ein bewerteter Körper mit Wertegruppe $\Gamma = \mathbb{Z}$, der vollständig ist bezüglich der Metrik $d(a, b) := 2^{-v(a-b)}$. Dann ist K henselsch.

Bemerkung 1.7.3 Eine zu Definition 1.7.1 äquivalente Formulierung ist: K ist henselsch, wenn für jedes $f \in \mathcal{O}_K[X]$ gilt: Jede einfache Nullstelle $\bar{a} \in \bar{K}$ von $\text{res}(f)$ lässt sich zu einer Nullstelle $b \in \text{res}^{-1}(\bar{a})$ von f liften.

Satz 1.7.4 (Newtons Lemma) Sei K wie in Satz ?? bewerteter Körper mit Wertegruppe $\Gamma = \mathbb{Z}$, sei $f \in \mathcal{O}_K[X]$ ein Polynom, und sei $a \in \mathcal{O}_K$ so, dass $v(f(a)) > 2v(f'(a))$ gilt. Dann existiert genau ein $b \in \mathcal{O}_K$ mit $f(b) = 0$ und $v(b-a) \geq v(f(a)) - v(f'(a))$.

Bemerkung 1.7.5 In henselschen Körpern gilt sogar Newtons Lemma (Übung).

Beispiel 1.7.6 Algebraisch abgeschlossene bewertete Körper sind henselsch.

Beispiel 1.7.7 Der Körper $\mathbb{R}^* \succ \mathbb{R}$ mit der Bewertung aus Beispiel 1.4.8 ist henselsch.

Bemerkung 1.7.8 Man kann zeigen: Ein bewerteter Körper K ist henselsch genau dann, wenn die Bewertung von K genau eine Fortsetzung auf den algebraischen Abschluss K^{alg} besitzt.

Bemerkung 1.7.9 Man kann zeigen: Zu jedem bewerteten Körper K gibt es einen kleinsten henselschen bewerteten Körper $K^h \subseteq K^{\text{alg}}$, der K enthält. K^h ist (als bewerteter Körper) eindeutig bis auf Automorphismus über K und heißt **henselsche Hülle** von K .

Bemerkung 1.7.10 Man kann zeigen: Ist K Körper mit Betrag und \hat{K} die Vervollständigung, so ist $K^h = \hat{K} \cap K^{\text{alg}}$.

1.8 Anwendung auf diophantische Gleichungen

Konvention: Alle Ringe sind kommutativ und mit 1.

Notation 1.8.1 Sei $\underline{f} := (f_1, \dots, f_\ell) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$ ein Tupel von Polynomen und sei R ein Ring. Dann schreiben wir

$$V_{\underline{f}}(R) := \{\underline{a} \in R^n \mid f_1(\underline{a}) = \dots = f_\ell(\underline{a}) = 0\}$$

für die Lösungen des Gleichungssystems „ $\underline{f} = 0$ “ in R^n .

Bemerkung 1.8.2 Die Lösbarkeit von diophantischen Gleichungen ist unentscheidbar: Es gibt keinen Algorithmus, der ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ nimmt und entscheidet, ob $V_f(\mathbb{Z})$ nicht-leer ist.

Bemerkung 1.8.3 Ist $V_{\underline{f}}(\mathbb{Z})$ nicht-leer, so ist auch $V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ nicht-leer für alle $m \geq 1$.

Lemma 1.8.4 Sei $\underline{f} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$ und $m \geq 1$. Ist $m = \prod_i p_i^{r_i}$ die Primfaktorzerlegung von m , so ist $\#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \prod_i \#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p_i^{r_i}\mathbb{Z})$.

Bemerkung 1.8.5 Für jede Primzahl p und jedes $r \geq 0$ gilt: $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p$, also insbesondere $\#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = \#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p)$.

Definition 1.8.6 Sei $\underline{f} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$ und p prim. Die **Poincaré-Reihe** zu \underline{f} ist die formale Potenzreihe

$$P_{\underline{f},p}(Z) := \sum_{r \in \mathbb{N}} N_r Z^r \in \mathbb{Q}[[Z]],$$

für $N_r := \#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$.

Satz 1.8.7 Sei $\underline{f} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$ und p prim. Die Poincaré-Reihe $P_{\underline{f},p}(Z)$ ist eine rationale Funktion in Z , d. h. $P_{\underline{f},p}(Z) \in \mathbb{Q}(Z)$.

Beispiel 1.8.8 Ist f das Null-Polynom in n Variablen, so ist $P_{f,p}(Z) = \frac{1}{1-p^n Z}$.

Satz 1.8.9 Sei $\underline{f} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$. Dann existieren ein Polynom $h \in \mathbb{Z}[Z, P]$ und Ringformeln $\phi_0, \dots, \phi_m, \phi'_0, \dots, \phi'_m$, so dass für jede Primzahl p gilt:

$$P_{\underline{f},p}(Z) = \frac{\sum_{i=0}^m (\#\phi_i(\mathbb{F}_p) - \#\phi'_i(\mathbb{F}_p)) Z^i}{h(Z, p)}.$$

2 Quantorenelimination in bewerteten Körpern

Im gesamten Kapitel ist (K, v) ein bewerteter Körper mit Wertegruppe Γ , Bewertungsring \mathcal{O}_K , maximalem Ideal $\mathcal{M}_K \subseteq \mathcal{O}_K$ und Restklassenkörper \bar{K} .

2.1 Leiterte

Definition 2.1.1 Eine **anguläre Komponente** auf einem bewerteten Körper K ist ein Gruppenhomomorphismus $\text{ac}: K^\times \rightarrow \bar{K}^\times$, der auf \mathcal{O}_K^\times mit res übereinstimmt. Wir setzen außerdem $\text{ac}(0) := 0$.

Satz 2.1.2 Sei K ein bewerteter Körper, aufgefasst als Struktur in einer beliebigen Sprache (in der sich ausdrücken lässt, dass K ein bewerteter Körper ist). Dann besitzt K eine elementare Erweiterung $K' \succ K$, auf der eine anguläre Komponente existiert.

Bemerkung 2.1.3 $1 + \mathcal{M}_K$ ist eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe K^\times .

Definition 2.1.4 Wir setzen $\text{RV}^\times := K^\times / (1 + \mathcal{M}_K)$ und $\text{RV} := \text{RV}^\times \cup \{0\}$ und schreiben $\text{rv}: K \rightarrow \text{RV}$ für die kanonische Abbildung $K^\times \rightarrow \text{RV}^\times$, fortgesetzt durch $0 \mapsto 0$. Für $a \in K$ nennt man $\text{rv}(a)$ den **Leitert** von a , und RV ist die **Leitertstruktur**. Für die Gruppe RV^\times verwenden wir multiplikative Notation. Außerdem setzen wir $0 \cdot \xi = 0$ für $\xi \in \text{RV}$.

Bemerkung 2.1.5 Für $a, b \in K$ gilt $\text{rv}(a) = \text{rv}(b)$ genau dann, wenn $v(a-b) > v(a)$ ist oder $a = b = 0$.

Beispiel 2.1.6 Im Fall $K = k((t))$ bilden die Elemente der Form $at^m \in K$ (für $a \in k, m \in \mathbb{Z}$) ein Repräsentantensystem von RV^\times ; es gilt $\text{RV}^\times \cong k^\times \times \Gamma$ (als Gruppen).

Bemerkung 2.1.7 Die Bewertung $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ faktorisiert über RV , d. h., es existiert eine Abbildung $v_{\text{RV}}: \text{RV} \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, so dass $v = v_{\text{RV}} \circ \text{rv}$ gilt. Die Einschränkung $v_{\text{RV}}|_{\text{RV}^\times}$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\text{RV}^\times, \cdot)$ nach $(\Gamma, +)$. Außerdem induziert rv einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\bar{K}^\times \rightarrow \text{RV}^\times$, dessen Bild genau der Kern von $v_{\text{RV}}|_{\text{RV}^\times}$ ist.

Bemerkung 2.1.8 Die Fasern $F = \text{rv}^{-1}(\zeta)$ der Abbildung rv (für $\zeta \in \text{RV}$) sind genau die Menge $\{0\}$ und die maximalen offenen Bälle, die 0 nicht enthalten; also $F = B_{>v_{\text{RV}}(\zeta)}(a)$, für $a \in \text{rv}^{-1}(\zeta)$ beliebig.

Bemerkung 2.1.9 Jede anguläre Komponente $ac: K \rightarrow \bar{K}$ faktorisiert über rv , d.h. sie lässt sich als Verknüpfung $ac = ac_{RV} \circ rv$ schreiben, für eine Abbildung $ac_{RV}: RV \rightarrow \bar{K}$. Dies liefert einen Gruppen-Isomorphismus $RV^\times \rightarrow \bar{K}^\times \times \Gamma$, $\xi \mapsto (ac_{RV}(\xi), v_{RV}(\xi))$.

Notation 2.1.10 Seien $\xi_1, \dots, \xi_n, \zeta \in RV$. Wenn $a_i \in K$ existieren mit $rv(a_i) = \xi_i$ und $rv(a_1 + \dots + a_n) = \zeta$, so schreiben wir $\zeta \approx \xi_1 + \dots + \xi_n$. Wenn genau ein ζ existiert mit $\zeta \approx \xi_1 + \dots + \xi_n$, so sagen wir, $\xi_1 + \dots + \xi_n$ ist **wohldefiniert**, und wir schreiben $\zeta = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Außerdem setzen wir $-\xi_1 := rv(-1) \cdot \xi_1$.

Lemma 2.1.11 Seien $a_1, \dots, a_n \in K$. Dann ist $rv(a_1) + \dots + rv(a_n)$ wohldefiniert genau dann, wenn $v(a_1 + \dots + a_n) = \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$ ist. Ist dies nicht der Fall, so gilt $rv(a_1) + \dots + rv(a_n) \approx \zeta$ genau für diejenigen $\zeta \in RV$, die $v(\zeta) > \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$ erfüllen.

2.2 Quantorenelimination: Die Aussagen

Definition 2.2.1 Wir definieren die folgenden Sprachen auf bewerteten Körpern K . (Die Namen der Sorten bedeuten: VF = valued field; VG = value group; RF = residue field.)

- (a) L_{VG} besteht aus einer Sorte VF für K mit L_{ring} , einer Sorte VG für $\Gamma \cup \{\infty\}$ mit $L_{oag} \cup \{\infty\}$ und der Bewertung $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$.
- (b) $L_{\mathcal{O}} = L_{ring} \cup \{\mathcal{O}\}$, wobei \mathcal{O} ein Prädikat für den Bewertungsring \mathcal{O}_K ist.
- (c) L_{RV} besteht aus: einer Sorte VF für K mit L_{ring} ; einer Sorte für RV mit $\{\cdot, 1, \xi_1 + \xi_2 \approx \zeta, -\}$, wobei „ $\xi_1 + \xi_2 \approx \zeta$ “ eine dreistellige Relation ist; und der Abbildung $rv: K \rightarrow RV$.
- (d) $L_{VG,RF}$ besteht aus L_{VG} , einer zusätzlichen Sorte RF für \bar{K} mit L_{ring} und der Abbildung $res: \mathcal{O}_K \rightarrow \bar{K}$. Formal setzt man $res(a) = 0$ für $a \in K \setminus \mathcal{O}_K$.
- (e) Falls K eine anguläre Komponente hat: Die **Denef-Pas-Sprache** L_{DP} besteht aus $L_{VG,RF}$ und zusätzlich der Abbildung $ac: K \rightarrow \bar{K}$.
- (f) Für beliebige Körper K : Die **Macintyre-Sprache** ist $L_{Mac} := L_{ring} \cup \{P_n \mid n \geq 2\}$, wobei P_n ein Prädikat für die n -ten Potenzen ist, also $P_n(a) \iff \exists b: b^n = a$.

Bemerkung 2.2.2 In den Sprachen L_Γ , $L_{\mathcal{O}}$, L_{RV} und $L_{\Gamma,RF}$ sind genau die gleichen Dinge definierbar. Insbesondere haben sie die gleichen imaginären Sorten.

- Bemerkung 2.2.3**
- (a) In jeder der Sprachen L_Γ , $L_{\mathcal{O}}$, L_{RV} und $L_{\Gamma,RF}$ existiert eine Theorie, deren Modelle genau die bewerteten Körper sind (und die Sorten der Sprache sind das, was sie sein sollen).
 - (b) In der Sprache L_{DP} existiert eine Theorie, deren Modelle genau die bewerteten Körper mit angulärer Komponente sind.
 - (c) In jeder dieser fünf Sprachen lässt sich durch eine Menge von Aussagen ausdrücken, dass der bewertete Körper henselsch ist.

Definition 2.2.4 Seien (p, q) eine mögliche Charakteristik von bewerteten Körpern (vgl. Bemerkung 1.4.10).

Wir schreiben HEN für die Theorie der henselschen bewerteten Körper (meistens in der Sprache L_{RV}). Ist p eine Primzahl oder 0, so setze $HEN_p := HEN \cup \{„\text{char } K = p“\}$. Ist q auch eine Primzahl oder 0 (wobei $q = p$ falls $p \neq 0$), so setze $HEN_{p,q} := HEN_p \cup \{„\text{char } \bar{K} = q“\}$.

Definition 2.2.5 Eine **RV-Erweiterung** von L_{RV} ist eine Sprache $L \supseteq L_{RV}$, so dass $L \setminus L_{RV}$ „nur auf RV lebt“, d. h. nur aus Konstanten in RV, Funktionssymbolen $RV^\ell \rightarrow RV$ und Relationssymbolen auf RV^ℓ besteht.

Definition 2.2.6 Sei L eine RV-Erweiterung von L_{RV} . Wir nennen eine L-Formel **VF-quantorenfrei** (kurz: „VF-qf“), wenn sie keine Quantoren über Variablen der Sorte VF enthält.

Satz 2.2.7 Sei $L \supseteq L_{RV}$ eine RV-Erweiterung und sei $T \supseteq HEN_{0,0}$ eine L-Theorie. Dann ist jede L-Formel modulo T äquivalent zu einer VF-quantorenfreien L-Formel.

Bemerkung 2.2.8 Es existiert eine Variante der Sprache L_{RV} , in der Satz 2.2.7 auch für $T \subseteq HEN_0$ gilt (also für beliebige Restklassenkörper-Charakteristik).

Korollar 2.2.9 Sei $L \supseteq L_{RV}$ eine RV-Erweiterung und sei $T \supseteq HEN_0$ eine L-Theorie. Dann existiert für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ ein $N_0 > 0$ und eine VF-quantorenfreie L-Formel $\psi(\underline{x})$, so dass gilt: Ist $K \models T$ ein Modell mit $\text{char } \bar{K} = 0$ oder $\text{char } \bar{K} > N_0$, so ist $\phi(K) = \psi(K)$.

2.3 Polynome und rv

Im gesamten Abschnitt sei K ein henselscher bewerteter Körper der Charakteristik $(0, 0)$.

Definition 2.3.1 Sei $f = \sum_i a_i X^i \in K[X]$ und $b \in K$. Wir sagen, f hat eine **Kollision** bei b , wenn $v(f(b)) > \min_i v(a_i b^i)$ ist.

Bemerkung 2.3.2 f hat keine Kollision bei b genau dann, wenn $\sum_i rv(a_i) rv(b)^i$ wohldefiniert ist. In diesem Fall ist die Summe gleich $rv(f(b))$.

Definition 2.3.3 Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n . Wir nennen ein $c \in K$ eine „**Nullstelle einer Ableitung** von f “, wenn ein $0 \leq \ell \leq n$ existiert, so dass $f^{(\ell)}(c) = 0$ ist. (Hierbei bezeichnet $f^{(\ell)}$ die ℓ -te Ableitung von f .) Ist $\ell \geq 1$, so nennen wir c eine „**Nullstelle einer echten Ableitung** von f “.

Lemma 2.3.4 Sei $f \in K[X]$ ein Polynom. Dann hat die Menge der $b \in K$, an denen f eine Kollision hat, die Form

$$\{b \in K \mid \exists c \in C: rv(b) = rv(c)\},$$

wobei $C \subseteq K$ eine Teilmenge der Nullstellen der Ableitungen von f ist.

Definition 2.3.5 Sei $f \in K[X]$ und seien $b, c \in K$. Wir sagen, f hat eine **um- c -Kollision** bei b , wenn das um c verschobene Polynom $g(X) := f(X + c)$ eine Kollision bei $b - c$ hat.

Bemerkung 2.3.6 Schreiben wir $f(X + c) =: g(X) = \sum_i a'_i X^i$, so hat f keine um- c -Kollision bei b genau dann, wenn $\text{rv}(f(c)) = \sum_i \text{rv}(a'_i) \cdot \text{rv}(b - c)^i$ gilt.

Lemma 2.3.7 Es existiert eine VF-*qf*-Formel η so dass $\eta(a_0, \dots, a_n, \text{rv}(b - c), c, \zeta)$ genau dann gilt (für $a_i, b, c \in K, \zeta \in \text{RV}$), wenn das Polynom $f = \sum a_i X^i$ keine um- c -Kollision bei b hat und außerdem $\text{rv}(f(b)) = \zeta$ gilt.

Lemma 2.3.8 Seien $f \in K[X]$ und $b \in K$ gegeben, und sei c eine Nullstelle einer Ableitung von f , so dass $v(b - c)$ maximal ist. Dann hat f keine um- c -Kollision bei b .

Lemma 2.3.9 Sei $f \in K[X]$ ein Polynom. Wir nehmen an, dass f mit keiner seiner echten Ableitungen eine gemeinsame Nullstelle hat. Sei außerdem $\zeta \in \text{RV}^\times$ gegeben. Dann sind äquivalent:

- (a) Es existiert eine Nullstelle $b \in K$ von f mit $\text{rv}(b) = \zeta$.
- (b) Es existiert ein $b \in K$ mit $\text{rv}(b) = \zeta$, so dass f eine um- c -Kollision bei b hat sowohl für $c = 0$ als auch für jede Nullstelle c jeder echten Ableitung von f .

2.4 Beweis von Quantorenelimination

Lemma 2.4.1 Seien $f_i(x, \underline{z}) \in \mathbb{Z}[x, \underline{z}]$ für $i = 1, 2$, wobei \underline{z} ein N -Tupel ist. Dann existieren endlich viele quantorenfreie L_{ring} -Formeln $\phi_\ell(\underline{z})$ und Polynome $g_\ell(x, \underline{z}), h_{i,\ell}(x, \underline{z}) \in \mathbb{Z}[x, \underline{z}], d_{i,\ell}(\underline{z})$ so dass für jeden Körper K und jedes Tupel $\underline{c} \in K^n$ gilt:

- (a) Es gibt genau ein ℓ , so dass $K \models \phi_\ell(\underline{c})$ gilt.
- (b) Für das ℓ aus (a) gilt:
 - (i) $g_\ell(x, \underline{c})$ ist der ggT von $f_1(x, \underline{c})$ und $f_2(x, \underline{c})$ (bis auf einen Faktor in K^\times);
 - (ii) $d_i(\underline{c}) \neq 0$ für $i = 1, 2$;
 - (iii) $d_i(\underline{c}) \cdot f_i(x, \underline{c}) = h_{i,\ell}(x, \underline{c}) \cdot g_\ell(x, \underline{c})$ für $i = 1, 2$.

Wir arbeiten in einer RV-Erweiterung $L \supseteq L_{\text{RV}}$ wie in Satz 2.2.7 und in $\text{HEN}_{0,0}$ (als L -Theorie aufgefasst). Im Folgenden ist x immer eine VF-Variable, \underline{z} ein Tupel von VF-Variablen und $\underline{\zeta}$ ein Tupel von RV-Variablen.

Lemma 2.4.2 Satz 2.2.7 folgt aus: Für jede VF-*qf*-Formel $\phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})$ ist $\exists x \phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})$ zu einer VF-*qf*-Formel äquivalent.

Im Folgenden sind $m, n, r \in \mathbb{N}, a_{i,j}, b_j, c_i \in \mathbb{Z}[\underline{z}], f_i = \sum_{j \leq m} a_{i,j} x^j, g = \sum_{j \leq n} b_j x^j \in \mathbb{Z}[x, \underline{z}]$. Außerdem ist $\phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})$ eine VF-*qf*-Formel. Für jede der folgenden Formen von Formeln $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta})$ führen wir eine Bezeichnungen ein für die Behauptung, dass jede Formel dieser Form äquivalent zu einer VF-*qf*-Formel ist:

- (B) $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = \exists x: \phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})$
(P) $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = \exists x: \bigwedge_{i \leq r} \text{rv}(f_i(x, \underline{z})) = \zeta_i$
(L) $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = \exists x: \bigwedge_{i \leq r} \text{rv}(x + c_i(\underline{z})) = \zeta_i$
(EB) $_n$ $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = b_n(\underline{z}) \neq 0 \wedge \exists x: (g(x, \underline{z}) = 0 \wedge \phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta}))$
(EP) $_n$ $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = b_n(\underline{z}) \neq 0 \wedge \exists x: (g(x, \underline{z}) = 0 \wedge \bigwedge_{i \leq r} \text{rv}(f_i(x, \underline{z})) = \zeta_i)$
(EL) $_n$ $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = b_n(\underline{z}) \neq 0 \wedge \exists x: (g(x, \underline{z}) = 0 \wedge \bigwedge_{i \leq r} \text{rv}(x + c_i(\underline{z})) = \zeta_i)$
- (B = beliebig, P = polynomial, L = linear, E = endlich).

- Lemma 2.4.3** (a) Aus (P) folgt (B).
(b) Aus (L) und (EB) $_n$ für alle n folgt (P).
(c) (L) ist wahr.
(d) Aus (EP) $_n$ folgt (EB) $_n$.
(e) (EP) $_0$ ist wahr, und für $n \geq 1$ gilt: Aus (EL) $_n$ und (EB) $_{n'}$ für alle $n' < n$ folgt (EP) $_n$.
(f) (EL) $_0$ ist wahr, und für $n \geq 1$ gilt: Aus (L) und (EB) $_{n'}$ für alle $n' < n$ folgt (EL) $_n$.

2.5 Der Satz von Ax-Kochen/Ershov und andere Folgerungen

Korollar 2.5.1 Sei $L \supseteq L_{\text{DP}}$ eine RF-VG-Erweiterung (d. h. durch Symbole, die nur auf RF und VG leben) und sei $T \supseteq \text{HEN}_{0,0}$ eine L -Theorie. Dann ist jede L -Formel ist modulo T äquivalent zu einer VF-quantorenfreien L -Formel.

Korollar 2.5.2 Sei \underline{x} ein Tupel von VF-Variablen, \underline{y} ein Tupel von RF-Variablen und $\underline{\lambda}$ ein Tupel von VG-Variablen. Jede L_{DP} -Formel $\phi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda})$ ist äquivalent zu einer endlichen booleschen Kombination von Formeln der Formen $\psi((\text{ac}(f_i(\underline{x})))_i, \underline{y})$ für L_{ring} -Formen ψ und $\psi'((v(f_i(\underline{x})))_i, \underline{\lambda})$ für L_{oag} -Formeln ψ' .

Definition 2.5.3 Sei L eine Sprache und S eine Sorte von L . Die auf S **induzierte Sprache** ist die Sprache L' bestehend aus einem Relationssymbol für jede Formel, die eine Teilmenge von S^n definiert. Jede L -Struktur \mathcal{M} liefert eine L' -Struktur mit Grundmenge $S^{\mathcal{M}}$; diese nennen wir die von L auf S **induzierte Struktur**.

Korollar 2.5.4 Sei $K \models \text{HEN}_{0,0}$, in der Sprache L_{DP} .

- (a) Die auf \bar{K} induzierte Struktur ist die L_{ring} -Struktur (bis auf Interdefinierbarkeit).
(b) Die auf Γ induzierte Struktur ist die L_{oag} -Struktur (bis auf Interdefinierbarkeit).

Korollar 2.5.5 (Satz von Ax-Kochen/Ershov, elementare-Äquivalenz-Version)
Sei L entweder L_{RV} oder L_{DP} . Sind K_1 und K_2 Modelle der L -Theorie $\text{HEN}_{0,0}$ mit $\bar{K}_1 \equiv_{L_{\text{ring}}} \bar{K}_2$ und $\Gamma_{K_1} \equiv_{L_{\text{oag}}} \Gamma_{K_2}$, so ist bereits $K_1 \equiv_L K_2$.

Korollar 2.5.6 (Satz von Ax-Kochen/Ershov, Transferprinzip-Version)
Sei L entweder L_{RV} oder L_{DP} , und sei ϕ eine L -Aussage. Dann existiert ein

$N \in \mathbb{N}$, so dass für alle L -Strukturen $K_1, K_2 \models \text{HEN}$ gilt: Ist $\bar{K}_1 \equiv_{L_{\text{ring}}} \bar{K}_2$, $\Gamma_{K_1} \equiv_{L_{\text{oag}}} \Gamma_{K_2}$, und ist $\text{char } \bar{K}_i$ entweder 0 oder größer als N (für $i = 1, 2$), so gilt

$$K_1 \models \phi \iff K_2 \models \phi.$$

Korollar 2.5.7 Ist \mathcal{U} ein beliebiger freier Ultrafilter auf der Menge \mathbb{P} der Primzahlen, so gilt $\prod_p \mathbb{Q}_p / \mathcal{U} \equiv \prod_p \mathbb{F}((t)) / \mathcal{U}$.

Bemerkung 2.5.8 Korollare 2.5.5 und 2.5.6 gelten auch in RF-Erweiterungen von VG-Erweiterungen von L_{DP} , wenn man $\bar{K}_1 \equiv \bar{K}_2$ und $\Gamma_{K_1} \equiv \Gamma_{K_2}$ für die entsprechenden induzierten Strukturen fordert.

Definition 2.5.9 Seien (p, q) eine mögliche Charakteristik von bewerteten Körpern (vgl. Bemerkung 1.4.10). Wir schreiben ACVF für die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper mit nicht-trivialer Bewertung (in einer geeigneten Sprache), $\text{ACVF}_p \supseteq \text{ACVF}$ für die Theorie, die zusätzlich $\text{char } K = p$ besagt und $\text{ACVF}_{p,q} \supseteq \text{ACVF}_p$ für die Theorie, die zusätzlich auch noch $\text{char } \bar{K} = q$ besagt.

Korollar 2.5.10 $\text{ACVF}_{0,0}$ hat in der Sprache L_{DP} (vollständig) Quantoren-Elimination. Außerdem ist $\text{ACVF}_{0,0}$ vollständig.

3 Geometrie in $\text{HEN}_{0,0}$

Wenn nicht anders angegeben, ist im gesamten Kapitel $L \supseteq L_{\text{RV}}$ eine RV-Erweiterung, und wir arbeiten in der Theorie $\text{HEN}_{0,0}$. Manchmal werden wir auch imaginäre Sorten von L_{RV} verwenden (insbesondere VG).

K ist immer eine L -Struktur, die ein Modell von $\text{HEN}_{0,0}$ ist, und $A \subseteq K \cup \text{RV}$ ist immer eine Parametermenge.

Variablen x, y, z sind immer VF-Variablen; Variablen ξ, ζ sind immer RV-Variablen.

3.1 Dimension

Notation 3.1.1 Wir schreiben $\text{acl}_{\text{VF}}(A)$ für den algebraischen Abschluss von A innerhalb der Sorte K , also für die Vereinigung aller endlichen A -definierbaren Teilmengen von K .

In den folgenden beiden Lemmas sei R der von $A \cap K$ erzeugte Unterring von K .

Lemma 3.1.2 Sei $X \subseteq K^n$ A -definierbar; wir schreiben ∂X für den (topologische) Rand von X , d. h. der Abschluss von X ohne das Innere von X . Dann existiert ein Polynom $f \in R[x] \setminus \{0\}$, so dass $f(\underline{b}) = 0$ für jedes $\underline{b} \in \partial X$ gilt.

Lemma 3.1.3 Der algebraische Abschluss $\text{acl}_{\text{VF}}(A)$ besteht genau aus den Nullstellen von Polynomen $f \in R[x] \setminus \{0\}$. Insbesondere gilt $\text{acl}_{\text{VF}}(A \cap K) = \text{acl}_{\text{VF}}(A) = \text{acl}_{\text{VF}}(A \cup \text{RV})$.

Satz 3.1.4 In $\text{HEN}_{0,0}$ hat acl_{VF} die Austauscheneigenschaft. Genauer gilt: Sind $A \subseteq K \cup \text{RV}$ und $b, c \in K$ mit $b \in \text{acl}(Ac) \setminus \text{acl}(A)$, so ist $c \in \text{acl}(Ab)$.

Definition 3.1.5 Den acl -Rang einer definierbaren Menge $X \subseteq K^n$ bezeichnen wir auch als **Dimension** von X , und wir schreiben $\dim X$ dafür.

Satz 3.1.6 Seien $X, X' \subseteq K^m$ und $Y \subseteq K^n$ definierbare Mengen. Dann gilt:

- (a) $\dim(X) = 0$ genau dann, wenn X endlich aber nicht leer ist.
- (b) $\dim(K) = 1$.
- (c) $\dim(X \cup X') = \max\{\dim(X), \dim(X')\}$.
Insbesondere: $X \subseteq X' \Rightarrow \dim(X) \leq \dim(X')$.
- (d) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine definierbare Abbildung. Dann ist für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Menge $Y_d := \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) = d\}$ definierbar, und es gilt:

$$\dim X = \max_d (\dim Y_d + d).$$

Insbesondere gilt $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$, und wenn eine definierbare Bijektion $f: X \rightarrow Y$ existiert, dann ist $\dim(X) = \dim(Y)$.

Lemma 3.1.7 Eine definierbare Teilmenge $X \subseteq K^n$ ist n -dimensional genau dann, wenn sie nicht-leeres Inneres hat (also einen Ball enthält).

Lemma 3.1.8 $\text{HEN}_{0,0}$ eliminiert \exists^∞ in der Sorte VF, d. h. zu jeder L-Formel $\phi(x, \underline{y}, \underline{\zeta})$ (wobei x eine VF-Variable ist) existiert eine L-Formel $\psi(\underline{y}, \underline{\zeta})$, so dass für jedes Modell $K \models \text{HEN}_{0,0}$ und jedes Tupel $(\underline{b}, \underline{\gamma}) \in K^n \times \text{RV}^m$ gilt: $K \models \psi(\underline{b}, \underline{\gamma})$ genau dann, wenn die Menge $\phi(K, \underline{b}, \underline{\gamma})$ unendlich ist.

Satz 3.1.9 Die Dimension einer definierbaren Menge $X \subseteq K^n$ ist die größte Zahl $d \leq n$, so dass eine Projektion $\pi: K^n \rightarrow K^d$ auf eine Teilmenge der Koordinaten existiert, so dass $\pi(X)$ einen Ball enthält.

3.2 Zerlegung in krumme Quader

Definition 3.2.1 Sei $C \subseteq K$ eine beliebige Teilmenge. Wir sagen, dass zwei Elemente $b, b' \in K$ durch C **getrennt** werden, wenn ein $c \in C$ existiert mit $\text{rv}(b - c) \neq \text{rv}(b' - c)$. Wir schreiben $b \sim_C b'$, wenn b und b' nicht durch C getrennt werden.

Bemerkung 3.2.2 Für $b, b' \in K$ gilt $b \sim_C b'$ genau dann, wenn ein Ball $B \subseteq K$ existiert, der sowohl b als auch b' enthält aber disjunkt zu C ist.

Bemerkung 3.2.3 Ist $C \subseteq K$ endlich, so ist jede \sim_C -Äquivalenzklasse entweder eine ein-Punkt-Menge oder ein offener Ball.

Lemma 3.2.4 Sei $A \subseteq K$, $C := \text{acl}_{\text{VF}}(A)$ und seien $b, b' \in K$. Wenn $b \sim_C b'$ gilt, dann haben b und b' den selben Typ über $A \cup \text{RV}$.

Notation 3.2.5 Ist im Folgenden $X \subseteq K^n \times \text{RV}^m$, so verwenden wir die folgenden Notationen für Fasern:

- (a) Für $\underline{b} \in K^n$ setzen wir $X_{\underline{b}} = \{\underline{\xi} \in \text{RV}^m \mid (\underline{b}, \underline{\xi}) \in X\}$.
- (b) Für $\underline{\xi} \in \text{RV}^m$ setzen wir $X_{\underline{\xi}} := \{\underline{b} \in K^n \mid (\underline{b}, \underline{\xi}) \in X\}$.

Lemma 3.2.6 Sei $X \subseteq K \times \text{RV}^m$ ($A \cup \text{RV}$)-definierbar, für $A \subseteq K$. Dann existiert eine endliche A -definierbare Menge $C \subseteq K$, so dass gilt: Werden $b, b' \in K$ nicht von C getrennt, so ist $X_b = X_{b'}$.

Bemerkung 3.2.7 Anders ausgedrückt: Für X, C wie in dem Lemma gilt: Für jedes $\underline{\xi} \in \text{RV}^m$ ist $X_{\underline{\xi}}$ eine Vereinigung von \sim_C -Äquivalenzklassen.

Definition 3.2.8 Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Gamma \cup \{\infty\}$. Ein **krummer Quader** mit Radien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist eine definierbare Teilmenge $Q \subseteq K^n$ der folgenden Form:

- (a) Im Fall $n = 1$: Q ist ein offener Ball mit Radius λ_1 (falls $\lambda_1 < \infty$), oder ein Punkt (falls $\lambda_1 = \infty$).
- (b) Im Fall $n > 1$: Die Projektion $Q' := \pi(Q) \subseteq K^{n-1}$ auf die ersten $n - 1$ Koordinaten ist ein krummer Quader mit Radien $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, und für jedes $\underline{x} \in Q'$ ist die Faser $\{y \in K \mid (\underline{x}, y) \in Q\}$ ein krummer Quader mit Radius λ_n .

Satz 3.2.9 Sei $X \subseteq K^n \times \text{RV}^m$ A -definierbar. Dann existiert eine A -definierbare Abbildung $f: K^n \rightarrow \text{RV}^k$, deren nicht-leere Fasern krumme Quader sind, und so dass für $\underline{b}, \underline{b}' \in K^n$ gilt: Ist $f(\underline{b}) = f(\underline{b}')$ so ist $X_{\underline{b}} = X_{\underline{b}'}$.

Bemerkung 3.2.10 Anders ausgedrückt: Für X, f wie im Satz gilt: Jede der Mengen $X_{\underline{\xi}}$ (für $\underline{\xi} \in \text{RV}^m$) ist das Urbild unter f einer Menge $Y_{\underline{\xi}} \subseteq \text{RV}^k$; insbesondere ist $X_{\underline{\xi}}$ eine Vereinigung von krummen Quadern.

Bemerkung 3.2.11 Der Satz gilt auch, wenn wir RV^m durch $\text{RV}^m \times \Gamma^\ell$ ersetzen: Ist $X \subseteq K^n \times \text{RV}^m \times \Gamma^\ell$ so wende die ursprüngliche Version des Satzes an auf $X' := \{(\underline{a}, \underline{\xi}, \underline{\zeta}) \in K^n \times \text{RV}^{m+\ell} \mid (\underline{a}, \underline{\xi}, v_{\text{RV}}(\zeta_1), \dots, v_{\text{RV}}(\zeta_\ell)) \in X\}$.

Bemerkung 3.2.12 Der Satz gilt auch uniform in den Parametern und uniform in allen Modellen von $\text{HEN}_{0,0}$, d. h. die Formel, die f definiert, hängt nur von der Formel, die X definiert, ab.

Lemma 3.2.13 Ist $C \subseteq K$ endlich und A -definierbar, so existiert eine A -definierbare Abbildung $f: K \rightarrow \text{RV}^N$, so dass für $b, b' \in K$ gilt: $b \sim_C b'$ genau dann, wenn $f(b) = f(b')$.

Bemerkung 3.2.14 Das Lemma gilt auch uniform in den Parametern und uniform in allen Modellen von $\text{HEN}_{0,0}$.

Lemma 3.2.15 Es gilt auch die Umkehrung von Lemma 3.2.4: Ist $A \subseteq K$, so haben zwei Elemente $b, b' \in K$ den gleichen Typ über $A \cup \text{RV}$ genau dann, wenn $b \sim_{\text{acl}_{\text{VF}} A} b'$ gilt.

Konvention 3.2.16 Ist $\Gamma \equiv \mathbb{Z}$, so fassen wir \mathbb{Z} als Untergruppe von Γ auf (wobei $1 \in \mathbb{Z}$ das kleinste positive Element von Γ ist).

Definition 3.2.17 Ist K ein beliebiger bewerteter Körper und $\lambda \in \Gamma$ mit $\lambda \geq 0$, so setzen wir $\text{RV}_\lambda^\times := K^\times / B_{>\lambda}(1)$ und $\text{RV}_\lambda := \text{RV}_\lambda^\times \cup \{0\}$ und schreiben $\text{rv}_\lambda: K \rightarrow \text{RV}_\lambda$ für die kanonische Abbildung. Für $a \in K$ nennt man $\text{rv}_\lambda(a)$ einen **höheren Leitterm** von a , und RV_λ ist eine **höhere Leittermstruktur**.

Bemerkung 3.2.18 Analog zu Bemerkungen 2.1.3 und 2.1.5 gilt:

- (a) $B_{>\lambda}(1)$ ist eine Untergruppe von K^\times .
- (b) Für $a, b \in K$ gilt $\text{rv}_\lambda(a) = \text{rv}_\lambda(b)$ genau dann, wenn $v(a - b) > v(a) + \lambda$ ist oder $a = b = 0$.

Notation 3.2.19 Ist K ein bewerteter Körper mit Wertegruppe $\Gamma \equiv \mathbb{Z}$, so schreiben wir RV_\bullet für die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \text{RV}_\ell$ der Sorten RV_ℓ . Wenn wir von einer definierbaren Menge $X \subseteq \text{RV}_\bullet^m$ sprechen, ist implizit gemeint: $X \subseteq \text{RV}_{\ell_1} \times \cdots \times \text{RV}_{\ell_m}$, für gewisse $\ell_i \in \mathbb{N}$.

Satz 3.2.20 Sei K ein henselscher bewerteter Körper der Charakteristik $(0, p)$ für p prim und mit Wertegruppe $\Gamma \equiv \mathbb{Z}$. Wir nehmen außerdem an, dass $v(p) \in \mathbb{N} \subseteq \Gamma$ liegt. sei $A \subseteq K \cup \text{RV}_\bullet$ und sei $X \subseteq K^n \times \text{RV}_\bullet^m$ A -definierbar. Dann existiert eine A -definierbare Abbildung $f: K^n \rightarrow \text{RV}_\bullet^k$, deren nicht-leere Fasern krumme Quader sind, und so dass für $\underline{b}, \underline{b}' \in K^n$ gilt: Ist $f(\underline{b}) = f(\underline{b}')$ so ist $X_{\underline{b}} = X_{\underline{b}'}$.

Bemerkung 3.2.21 Für hinreichend große p gilt Satz 3.2.9 auch direkt in Körpern der Charakteristik $(0, p)$ (und auch in Körpern der Charakteristik (p, p)); die Schranke an p hängt hier von der Formel ab, die die Menge $X \subseteq K^n \times \text{RV}_\bullet^m$ definiert.

3.3 Messen in \mathbb{Q}_p

Satz 3.3.1 Auf jeder lokal kompakten topologischen Gruppe G mit abzählbarer Umgebungsbasis existiert ein bis auf Skalierung eindeutiges Borel-Maß μ mit folgenden Eigenschaften:

- μ ist links-invariant.
- μ ist nicht-trivial (also nicht überall 0).
- Jede kompakte Menge hat ein endliches Maß.

Definition 3.3.2 Das Maß aus Satz 3.3.1 heißt **Haar-Maß**.

Satz 3.3.3 \mathbb{Z}_p ist kompakt. Insbesondere ist $(\mathbb{Q}_p, +)$ eine lokal-kompakte topologische Gruppe.

Konvention 3.3.4 Von nun an sei μ das Haar-Maß auf $(\mathbb{Q}_p, +)$, das so normiert ist, dass $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$ ist. Das Produktmaß auf \mathbb{Q}_p^n bezeichnen wir auch mit μ .

Lemma 3.3.5 Das Haar-Maß eines Balls $B_{>\lambda}(a) = B_{\geq\lambda+1}(a) \subseteq \mathbb{Q}_p$ ist $p^{-\lambda-1}$.

Satz 3.3.6 Wir fassen \mathbb{Q}_p als L -Struktur auf in einer RV-Erweiterung $L \supseteq L_{\text{RV}}$. Dann ist jede definierbare Menge $X \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ Borel-messbar. Genauer: Ist $f: \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \text{RV}^N$ wie in Satz 3.2.20, so gilt: $\mu(X) = \sum_{\underline{\xi} \in f(X)} p^{-g(\underline{\xi})-n}$, wobei $g(\underline{\xi}) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die Summe der Radien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des krummen Quaders $f^{-1}(\underline{\xi})$ ist.

Bemerkung 3.3.7 Die Funktion g aus Satz 3.3.6 ist definierbar.

3.4 Presburger-Mengen

In diesem Abschnitt arbeiten wir in der Sprache L_{Pres} :

Definition 3.4.1 Die **Sprache von Presburger** ist $L_{\text{Pres}} = L_{\text{oag}} \cup \{1\} \cup \{\equiv_\ell \mid \ell \geq 1\}$, wobei \equiv_ℓ eine binäre Relation ist, die in \mathbb{Z} interpretiert wird als: $a \equiv_\ell b \iff a \equiv b \pmod{\ell}$.

Bemerkung 3.4.2 L_{Pres} -Terme in \underline{x} haben die Form $c + \sum_i r_i x_i$, für $c, r_i \in \mathbb{Z}$.

Satz 3.4.3 In der Sprache L_{Pres} hat \mathbb{Z} Quantorenelimination.

Lemma 3.4.4 Jede quantorenfreie L_{Pres} -Formel $\phi(\underline{x}, y)$ ist äquivalent zu einer Disjunktion von Formeln der Form

$$\phi_i(\underline{x}, y) = \psi_i(\underline{x}) \wedge t_i(\underline{x}) \leq r_i y \leq t'_i(\underline{x}) \wedge y \equiv_{\ell_i} c_i$$

wobei die $\psi_i(\underline{x})$ quantorenfreie L_{Pres} -Formeln sind, $t_i(\underline{x})$ und $t'_i(\underline{x})$ L_{Pres} -Terme oder $-\infty$ bzw. $+\infty$ und für natürliche Zahlen $0 \leq c_i < \ell_i$ und $r_i \geq 1$. Außerdem kann erreicht werden, dass die ϕ_i paarweise inkonsistent sind.

Korollar 3.4.5 (Presburger-Zellzerlegung) Jede L_{Pres} -definierbare Teilmenge von \mathbb{Z}^n ist eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen, die durch Formeln definiert werden, die wie die ϕ_i in Lemma 3.4.4 aussehen.

Satz 3.4.6 (Rektilinearisierung) Jede definierbare Teilmenge von \mathbb{Z}^n lässt sich als disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen der Form $f_i(\mathbb{N}^k)$ schreiben, wobei $f_i: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^n$ eine injektive Abbildung ist, deren Koordinaten durch L_{Pres} -Terme gegeben sind.

Definition 3.4.7 Sei $X \subseteq \mathbb{N}^n$ eine beliebige Teilmenge. Die **Poincaré-Reihe** zu X ist die formale Potenzreihe $P_X(Z_1, \dots, Z_n) := \sum_{\underline{r} \in X} \underline{Z}^{\underline{r}} \in \mathbb{Z}[[Z_1, \dots, Z_n]]$. Hierbei verwenden wir Multiindex-Notation: $\underline{Z}^{\underline{r}} = Z_1^{r_1} \cdots Z_n^{r_n}$.

Satz 3.4.8 Ist $X \subseteq \mathbb{N}^n$ L_{Pres} -definierbar, so ist die Poincaré-Reihe P_X eine rationale Funktion; genauer: $P_X = g(\underline{Z})/h(\underline{Z})$ für Polynome $g, h \in \mathbb{Z}[\underline{Z}]$, wobei h ein Produkt von Polynomen der Form $1 - \underline{Z}^{\underline{a}}$ ist, für Tupel $\underline{a} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$.

3.5 Rationalität von L_{DP} -Poincaré-Reihen

Definition 3.5.1 Sei $X \subseteq \mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Z}^m$ so, dass für jedes $\underline{r} \in \mathbb{N}^m$ das Maß $\mu(X_{\underline{r}})$ endlich ist. Dann definieren wir die zugehörige **Poincaré-Reihe** als

$$P_X(\underline{Z}) := \sum_{\underline{r} \in \mathbb{N}^m} \mu(X_{\underline{r}}) \underline{Z}^{\underline{r}}.$$

Beispiel 3.5.2 Die Poincaré-Reihe aus Definition 1.8.6 ist im Wesentlichen ein Spezialfall davon: Ist $\underline{f} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^\ell$ gegeben, so setze $X_r := \{\underline{a} \in \mathbb{Q}_p^n \mid v(f_1(\underline{a})) > r, \dots, v(f_\ell(\underline{a})) > r\}$. Dann ist

$$\mu(X_r) = \#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \cdot \mu((p^r\mathbb{Z}_p)^n)$$

und damit

$$P_{\underline{f}, p}(Z) = P_X(p^n Z).$$

Satz 3.5.3 Sei $\phi(\underline{x}, \underline{\lambda})$ eine L_{DP} -Formel, wobei \underline{x} ein n -Tupel von VF-Variablen ist und $\underline{\lambda}$ ein m -Tupel von VG-Variablen. Wir nehmen an, dass für jede Primzahl p und jedes $\underline{r} \in \mathbb{N}^m$ das Maß $\mu(\phi(\mathbb{Q}_p, \underline{r}))$ endlich ist. Dann existiert ein $M > 0$, ein Polynom $h \in \mathbb{Z}[\underline{Z}, P]$ und endlich viele Ringformeln ψ_ℓ, ψ'_ℓ ($\ell \in I \subseteq \mathbb{N}^m$), so dass für jede Primzahl $p \geq M$ gilt:

$$P_{\phi(\mathbb{Q}_p)}(\underline{Z}) = \frac{\sum_{\ell \in I} (\#\psi_\ell(\mathbb{F}_p) - \#\psi'_\ell(\mathbb{F}_p)) \underline{Z}^\ell}{h(\underline{Z}, p)}.$$

Lemma 3.5.4 Ist $P \in \mathbb{Q}[[\underline{Y}, \underline{Z}]]$ eine rationale Funktion und ist $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ so, dass P absolut konvergiert, wenn man \underline{a} für \underline{Y} einsetzt (so dass man $P(\underline{a}, \underline{Z}) \in \mathbb{Q}[[\underline{Z}]]$ erhält), so ist auch $P(\underline{a}, \underline{Z})$ eine rationale Funktion.

Index

- ACVF*, 14
- L_{RV} , 10
- $L_{\mathcal{O}}$, 10
- L_{Mac} , 10
- \mathbb{Q}_p , 3
- L_{VG} , 10
- $L_{VG,RF}$, 10
- DP, 10
- RV-Erweiterung, 11
- VF=quantorenfrei, 11
- p -adische Norm, 2
- p -adische Zahlen, 3
- p -adischer Betrag, 2
- VF-*qf*, 11

- abelsche Gruppe
 - angeordnete, 4
- abgeschlossener Ball, 5
- angeordnete abelsche Gruppe, 4
- anguläre Komponente, 9
- archimedisch, 2
- Ax-Kochen/Ershov
 - Satz von, 13

- Betrag, 2
 - p -adischer, 2
 - archimedischer, 2
 - trivialer, 2
- bewerteter Körper, 4
- Bewertung, 4
- Bewertungs-Topologie, 5
- Bewertungsring, 5
 - abstrakter, 5

- Charakteristik, 6

- Denef-Pas-Sprache, 10
- Dimension, 15
- Dreiecksungleichung, 2
 - ultrametrische, 2

- Eisensteinsches Irreduzibilitäts=Kriterium
 - verallgemeinertes, 7

- formale Laurent-Reihen, 4
- formale Potenzreihen, 4
- Fortsetzung, 6

- ganze p -adische Zahlen, 3
- gemischte Charakteristik, 6
- getrennt, 15
- Gruppe
 - angeordnete abelsche, 4

- Haar-Maß, 17
- Hensels Lemma, 7
- henselsche Hülle, 8
- höhere Leittermstruktur, 17
- höherer Leitterm, 17

- induzierte Sprache, 13
- induzierte Struktur, 13
- Irreduzibilitäts=Kriterium
 - verallgemeinertes Eisensteinsches, 7

- Kollision, 11
- Kollision um, 12
- krummer Quader, 16
- Körper
 - bewerteter, 4

- Leitterm, 9
 - höherer, 17
- Leittermstruktur, 9
 - höhere, 17
- Lemma
 - von Hensel, 7
 - von Newton, 7

- Macintyre-Sprache, 10

- Newton-Polygon, 6
- Newtons Lemma, 7
- nicht-archimedisch, 2
- Norm, 2
 - p -adische, 2
- Nullstelle einer Ableitung, 11
- Nullstelle einer echten Ableitung, 11

- offener Ball, 5

- Poincaré-Reihe, 8, 18, 19
- Presburger
 - Sprache, 18

- Restklassenabbildung, 5

Restklassenkörper, 5

satz

Hensels Lemma, 7

Newtons Lemma, 7

Satz von Ax-Kochen/Ershov, 13

Satz von Ostrowski, 2

Segment, 6

Sprache

von Denef-Pas, 10

von Macintyre, 10

Sprache von Presburger, 18

Transferprinzip, 13

trivialer Betrag, 2

ultrametrische Dreiecksungleichung, 2

um- c -Kollision, 12

Verallgemeinertes Eisensteinsches Irre-
duzibilitätskriterium, 7

Wertegruppe, 4

wohldefiniert

Summe in RV, 10

Äquivalenzcharakteristik, 6

äquivalente Bewertungen, 4