Kurzskript Modelltheorie II

Immi Halupczok

11. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

Modelltheorie II

1 Bewertete Körper

1.1 Beträge

Definition 1.1.1 *Sei K ein Körper. Ein* ***Betrag*** *auf K ist eine Abbildung $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:*

(a) $|a| = 0 \iff a = 0$
(b) $|ab| = |a| \cdot |b|$
(c) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(**Dreiecksungleichung**).*

(Manchmal nennt man das auch eine ***Norm*** *auf K; es gibt aber auch etwas anderes, was man einen Norm auf einem Körper nennt.)*

Beispiel 1.1.2 *Auf $K \subseteq \mathbb{R}$: der normale Absolutbetrag: $|a|_{\mathbb{R}} = a$ falls $a \geq 0$ und $|a|_{\mathbb{R}} = -a$ falls $a \geq 0$.*

Beispiel 1.1.3 *Auf $K \subseteq \mathbb{C}$: der komplexe Betrag: $|a+ib|_{\mathbb{C}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.*

Beispiel 1.1.4 *Der* ***triviale Betrag*** *auf einem beliebigen Körper K: $|0|_0 = 0$, $|a|_0 = 1$ für $a \in K^\times$.*

Bemerkung 1.1.5 *Es gilt: $|1| = 1$; $|a| = |-a|$; $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$ für $a \in K^\times$.*

Definition 1.1.6 *Ein Betrag $|\cdot|$ heißt* ***nicht-archimedisch****, wenn die* ***ultrametrische Dreiecksungleichung*** *gilt:*

$$|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$$

Sonst heißt $|\cdot|$ ***archimedisch****.*

Beispiel 1.1.7 *Sei R ein faktorieller Ring, $K = \operatorname{Frac} R$, und sei $p \in R$ ein irreduzibles Element. Dann lässt sich jedes Element $a \in K^\times$ schreiben in der Form $a = p^r \cdot \frac{m}{n}$, mit $m, n \in R$ nicht durch p teilbar und $r \in \mathbb{Z}$ beliebig. Sei außerdem s eine beliebige relle Zahl größer als 1. Dann wird durch $|a|_p := s^{-r}$ (und $|0|_p := 0$) ein (nicht-archimedischer) Betrag auf K definiert. Man nennt dies den p-**adischen Betrag** (oder die p-**adische Norm**).*

Bemerkung 1.1.8 *Ist $R = \mathbb{Z}$ und p eine Primzahl, so ist es üblich, $s = p$ zu wählen, d. h. der p-adische Betrag auf $\mathbb{Q}$ ist $|a|_p := p^{-r}$.*

Satz 1.1.9 (Satz von Ostrowski) *Die einzigen Beträge auf $\mathbb{Q}$ sind der triviale, $x \mapsto |x|_{\mathbb{R}}^{\lambda}$ für $\lambda \in (0,1]$, und $x \mapsto |x|_p^{\lambda}$ für $\lambda \in (0,\infty)$ und p prim.*

Lemma 1.1.10 *Sei K ein Körper mit einem Betrag $|\cdot|$, und sei $A := \{|n \cdot 1| \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Ist $|\cdot|$ archimedisch, so ist A unbeschränkt. (Inbesondere hat K Charakteristik 0.) Ist $|\cdot|$ nicht-archimedisch, so ist $A \subseteq [0,1]$.*

Beispiel 1.1.11 *Ist k ein beliebiger Körper, $R = k[t]$, $a \in k$ und $f = t - a$, so gilt für $q \in k(t) = \operatorname{Frac} R$: Ist $|q|_f = 2^r$, so hat q eine r-fache Nullstelle bei a, wobei Polstellen als negative Nullstellen angesehen werden.*

1.2 Vervollständigung

Lemma 1.2.1 *Sei K ein Körper und $|\cdot|$ ein Betrag auf K. Dann ist $d(a,b) := |a-b|$ eine Metrik auf K. Addition, Multiplikation, $x \mapsto -x$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ (für $x \neq 0$) sind stetig bezüglich der von dieser Metrik induzierten Topologie.*

Satz 1.2.2 *Sei K ein Körper mit einem Betrag $|\cdot|$, und sei $\hat{K}$ die Vervollständigung von K bezüglich der von $|\cdot|$ induzierten Metrik. Dann lassen sich die Addition, die Multiplikation und der Betrag von K auf eindeutige Weise stetig auf $\hat{K}$ fortsetzen, und $\hat{K}$ wird auf diese Art auch ein Körper mit Betrag.*

Beispiel 1.2.3 *Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ ist $\mathbb{R}$.*

Definition 1.2.4 *Sei p eine Primzahl. Der Körper $\mathbb{Q}_p$ der **p-adischen Zahlen** ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des p-adischen Betrags.*

Korollar 1.2.5 (zum Satz von Ostrowski) *Die Vervollständigungen von $\mathbb{Q}$ bezüglich beliebigen Beträgen auf $\mathbb{Q}$ sind: $\mathbb{Q}$ selbst (wenn der Betrag trivial ist); $\mathbb{R}$; und $\mathbb{Q}_p$ für alle Primzahlen p.*

Satz 1.2.6 *Sei p eine Primzahl.*

(a) *Seien $r_i \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ für alle $i \geq \mathbb{Z}$. Wir nehmen an, dass ein $N \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $r_i = 0$ für alle $i < N$ ist. Dann konvergiert die Folge*

$$a_m := \sum_{i=N}^{m} r_i p^i$$

bezüglich der p-adischen Norm gegen ein Element

$$a := \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i p^i := \lim_{m \to \infty} a_m$$

aus $\mathbb{Q}_p$. Ist N minimal mit $r_N \neq 0$, so ist $|a|_p = p^{-N}$.

(b) *Jedes Element $a \in \mathbb{Q}_p$ lässt sich auf eindeutige Weise als ein solcher Limes schreiben.*

Definition 1.2.7 *Die **ganzen p-adischen Zahlen** sind definiert als $\mathbb{Z}_p := \{a \in \mathbb{Q}_p \mid |a|_p \leq 1\}$.*

Bemerkung 1.2.8 *Es gilt $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{i \geq 0} r_i p^i \mid r_i \in \{0, \dots, p-1\}$ für alle $i\}$, wobei der Grenzwert in $\mathbb{Q}_p$ berechnet wird.*

Bemerkung 1.2.9 *$\mathbb{Z}_p$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$.*

Satz 1.2.10 *$\mathbb{Z}_p$ ist der topologische Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}_p$.*

Definition 1.2.11 *Sei k ein Körper. Die Menge der **formalen Laurent-Reihen** über k ist definiert als die Menge der formalen Summen der Form*

$$k((t)) := \{\sum_{i \geq N} r_i t^i \mid N \in \mathbb{Z}, \forall i \colon r_i \in k\}.$$

*Die Summe und das Produkt von zwei solchen Reihen sind so definiert, wie man es bei Reihen erwartet. Der (t-adische) Betrag einer formalen Reihe $a = \sum_{i \geq N} r_i t^i \in k((t))$ mit $r_N \neq 0$ ist $|a|_t := 2^{-N}$. (Und: $|0|_t := 0$.) Die **formalen Potenzreihen** sind*

$$k[[t]] := \{a \in k((t)) \mid |a|_t \leq 1\} = \{\sum_{i \geq 0} r_i t^i \mid \forall i \colon r_i \in k\}.$$

Satz 1.2.12 *$k((t))$ ist die Vervollständigung von $k(t)$ bezüglich des t-adischen Betrags aus Beispiel 1.1.11; insbesondere ist $k((t))$ ein Körper. Die Teilmenge $k[[t]]$ bildet einen Unterring, und sie ist der topologische Abschluss von $k[t]$ in $k((t))$.*

1.3 Bewertete Körper

Definition 1.3.1 *Eine **angeordnete abelsche Gruppe** ist eine abelsche Gruppe Γ mit Ordnungsrelation $<$, so dass für alle $\alpha, \alpha', \beta \in \Gamma$ gilt: $\alpha < \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha' + \beta$.*

Beispiel 1.3.2 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

Bemerkung 1.3.3 *Angeordnete abelsche Gruppen sind torsionsfrei.*

Definition 1.3.4 *Sei K ein Körper. Eine **Bewertung** auf K ist eine Abbildung $v \colon K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, wobei Γ eine angeordnete abelsche Gruppe ist, so dass für alle $a, b \in K$ gilt:*

- $v(a) = \infty \iff a = 0$
- $v(ab) = v(a) + v(b)$
- $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

*Ein Körper mit Bewertung heißt **bewerteter Körper**. Γ heißt **Wertegruppe**.*

*Zwei Bewertungen $v\colon K \to \Gamma$, $v'\colon K \to \Gamma'$ heißen **äquivalent**, wenn ein ordungserhaltender Gruppenisomorphismus $\alpha\colon \Gamma \to \Gamma'$ existiert mit $v' = \alpha \circ v$.*

Bemerkung 1.3.5 *Ist (K, v) ein bewerteter Körper mit Wertegruppe $\Gamma \subseteq (\mathbb{R}, +)$, so wird durch $|x| := 2^{-v(x)}$ ein nicht-archimedischer Betrag auf K definiert. Ist umgekehrt $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Betrag auf einem Körper K, so erhält man eine Bewertung $v(x) := -\log(|x|)$ auf K, deren Wertegruppe eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist.*

Beispiel 1.3.6 *Den p-adischen Beträgen aus Beispiel 1.1.7 entsprechen jeweils p-adische Bewertungen (mit Wertegruppe $\mathbb{Z}$): Ist R ein faktorieller Ring, $K = \operatorname{Frac} R$ und $p \in R$ irreduzibel, so ist die p-adische Bewertung auf K definiert durch $v_p(p^r \cdot \frac{m}{n}) = r$, für $r \in \mathbb{Z}$ und $m, n \in R$ nicht durch p-teilbar.*

Bemerkung 1.3.7 *Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Dann gilt für $a, b \in K$:*

(a) $v(1) = 0$; $v(-a) = v(b)$; $v(\frac{1}{a}) = -v(a)$

(b) *Ist $v(a) \neq v(b)$, so ist $v(a + b) = \min\{v(a), v(b)\}$.*

(c) *Sind $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, so tauch die minimale Bewertung mehrfach auf, d. h. es existieren $j \neq j'$ mit $v(a_j) = v(a_{j'}) = \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$.*

Definition 1.3.8 *Sei (K, v) ein bewerteter Körper mit Wertegruppe Γ.*

(a) *Ein **offener Ball** in K ist eine Teilmenge der Form $B_{>\gamma}(a) := \{x \in K \mid v(x - a) > \gamma\}$ für $a \in K$, $\gamma \in \Gamma$.*

(b) *Ein **abgeschlossener Ball** in K ist eine Teilmenge der Form $B_{\geq\gamma}(a) := \{x \in K \mid v(x - a) \geq \gamma\}$ für $a \in K$, $\gamma \in \Gamma$.*

(c) *Die **Bewertungs-Topologie** auf K ist die Topologie mit den offenen Bällen als Basis.*

Bemerkung 1.3.9 (a) *„Jeder Punkt eines Balls ist Mittelpunkt des Balls“: Für $b \in B_{>\gamma}(a)$ beliebig gilt $B_{>\gamma}(a) = B_{>\gamma}(b)$; und analog für abgeschlossene Bälle.*

(b) *Sind $B_1, B_2 \subseteq K$ zwei Bälle, so ist entweder einer der Bälle im anderen enthalten oder $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.*

Bemerkung 1.3.10 *Ist $B \subseteq K$ ein offener <u>oder</u> abgeschlossener Ball, so ist B topologisch offen <u>und</u> abgeschlossen.*

1.4 Bewertungsringe

Lemma 1.4.1 *Sei (K, v) ein bewerteter Körper. Dann gilt:*

(a) $\mathcal{O}_K := \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ *ist ein Unterring von* K.
(b) *Die Einheiten dieses Rings sind* $\mathcal{O}_K^\times = \{a \in K \mid v(a) = 0\}$.
(c) $\mathcal{M}_K := \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ *ist das einzige maximale Ideal von* $\mathcal{O}_K$.

Definition 1.4.2 *Den Ring $\mathcal{O}_K$ aus Lemma 1.4.1 nennt man den **Bewertungsring** von v. Den Quotient $\bar{K} := \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ nennt man den **Restklassenkörper**. Die Abbildung $\mathcal{O}_K \to \bar{K}$ heißt **Restklassenabbildung** und wird mit* res *bezeichnet (und manchmal auch als $a \mapsto \bar{a}$ geschrieben).*

Beispiel 1.4.3 (a) *Ist $K = k((t))$, so ist $\mathcal{O}_K = k[[t]]$, $\mathcal{M}_K = tk[[t]]$, $\bar{K} = k$ und* $\operatorname{res}(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i t^i) = r_0$.
(b) *Ist $L = \mathbb{Q}_p$, so ist $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p$, $\mathcal{M}_K = p\mathbb{Z}_p$, $\bar{K} = \mathbb{F}_p$ und* $\operatorname{res}(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i p^i) = r_0$.

Bemerkung 1.4.4 *Eine Bewertung auf einem Körper K ist (bis auf Äquivalenz) eindeutig durch den Bewertungsring $\mathcal{O}_K$ festgelegt: Die Bewertung ist ein surjektiver Gruppenhomorphismus von $K^\times$ nach Γ mit Kern $\mathcal{O}_K^\times$; es gilt also $\Gamma \cong K^\times/\mathcal{O}_K^\times$. Außerdem ist die Ordnung auf Γ dadurch festgelegt, dass $v(a) \geq 0$ genau dann, wenn $a \in \mathcal{O}_K$ ist.*

Definition 1.4.5 *Ein (abstrakter) **Bewertungsring** von einem Körper K ist ein Unterring $R \subseteq K$, so dass gilt: Für alle $a \in K$ ist $a \in R$ oder $\frac{1}{a} \in R$.*

Bemerkung 1.4.6 *Ist K ein bewerteter Körper, so ist der Bewertungsring $\mathcal{O}_K$ insbesondere ein abstrakter Bewertungsring.*

Satz 1.4.7 *Jeder abstrakte Bewertungsring eines Körpers K ist der Bewertungsring einer Bewertung auf K.*

Beispiel 1.4.8 *Ist $\mathbb{R}^* \succ \mathbb{R}$ eine elementare Erweiterung, so können wir auf $\mathbb{R}^*$ eine Bewertung definieren, die die Größenordnung von Elementen misst. Es ist die Bewertung, die als Bewertungsring die Menge der „endlichen" Zahlen hat: $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^*} := \{a \in \mathbb{R}^* \mid \exists b \in \mathbb{R} \colon |a|_{\mathbb{R}} < b\}$. Der Restklassenkörper zu dieser Bewertung ist $\mathbb{R}$.*

Definition 1.4.9 *Sei K ein bewerteter Körper und $\bar{K}$ sein Restklassenkörper. Man sagt, K hat **Charakteristik** (p, q), wenn $\operatorname{char} K = p$ und $\operatorname{char} \bar{K} = q$ ist. Ist $q = p$, so sagt man auch, K hat **Äquicharakteristik** p. Ist $q \neq p$, so sagt man, K hat **gemischte Charakteristik**.*

Bemerkung 1.4.10 *Als Charakteristiken von bewerteten Körpern können auftreten: $(0, 0)$, $(0, p)$ und (p, p), für Primzahlen p.*

1.5 Fortsetzung von Bewertungen

Definition 1.5.1 *Seien (K_1, v_1) und (K_2, v_2) bewertete Körper mit $K_1 \subseteq K_2$ und seien Γ_1 und Γ_2 die entsprechenden Wertegruppen. Wir nennen v_2 eine* ***Fortsetzung*** *von v_1 (auf K_2), wenn v_1 äquivalent ist zur Einschränkung $v_2|_{K_1}$.*

Bemerkung 1.5.2 *Nach Bemerkung 1.4.4 ist das äquivalent zu: $\mathcal{O}_{K_1} = \mathcal{O}_{K_2} \cap K_1$. Außerdem gilt dann auch $\mathcal{O}_{K_1}^\times = \mathcal{O}_{K_2}^\times \cap K_1$ und $\mathcal{M}_{K_1} = \mathcal{M}_{K_2} \cap K_1$, und man erhält eine natürliche Einbettung $\bar{K}_1 \subseteq \bar{K}_2$.*

Satz 1.5.3 *Ist $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, so lässt sich jede Bewertung auf K zu einer Bewertung auf L fortsetzen.*

1.6 Newton-Polygone

Im folgenden sei K ein bewerteter Körper mit Wertegruppe Γ und $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \{\frac{\gamma}{n} \mid \gamma \in \Gamma, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ die divisible Hülle von Γ.

Definition 1.6.1 *Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$. Das* ***Newton-Polygon*** *von f ist der Streckenzug durch die Punkte $(\ell, \mathrm{NP}_f(\ell)) \in \mathbb{N} \times \Gamma_{\mathbb{Q}}$, für $0 \leq \ell \leq n$, wobei*

$$\mathrm{NP}_f(\ell) = \min\left\{v(a_\ell), \min_{i<\ell, j>\ell} \frac{(\ell - i)v(a_j) + (j - \ell)v(a_i)}{j - i}\right\}.$$

Aufeinanderfolgende Teilstrecken, die auf einer Geraden liegen, nennt man ein ***Segment*** *des Newtonpolygons.*

Satz 1.6.2 *Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n. Wir setzen die Bewertung von K auf beliebige Weise auf K^{alg} fort und schreiben $f = a_n \cdot \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$, mit $\alpha_i \in K^{\mathrm{alg}}$ und $v(\alpha_1) \geq v(\alpha_2) \geq \cdots \geq v(\alpha_n)$. Dann ist $\mathrm{NP}_f(\ell) = v(a_n) + \sum_{i>\ell} v(\alpha_i)$ für $\ell = 0, \ldots, n$; oder anders ausgedrückt: $v(\alpha_\ell) = \mathrm{NP}_f(\ell) - \mathrm{NP}_f(\ell + 1)$ für $\ell = 1, \ldots, n$.*

Korollar 1.6.3 *Ist $f \in \mathcal{O}_K[X]$ ein normiertes Polynom, so liegen alle Nullstellen von f in $\mathcal{O}_K$.*

Korollar 1.6.4 *Wenn wir die Bewertung von K auf beliebige Weise auf K^{alg} fortsetzen, so hat diese Fortsetzung als Wertegruppe $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.*

Korollar 1.6.5 *Sind $f, g \in K[X]$ Polynome vom Grad n und m und ist $h = f \cdot g$, so lässt sich NP_h wie folgt aus NP_f und NP_g bestimmen:*

- $\mathrm{NP}_h(m + n) = \mathrm{NP}_f(n) + \mathrm{NP}_g(m)$

- *Die Segmente von* NP_h *sind genau die Segmente von* NP_f *und die Segmente von* NP_g*, so sortiert, dass* NP_h *konvex ist; also formal: Ist* $\lambda_i = \mathrm{NP}_f(i) - \mathrm{NP}_f(i-1)$ *für* $i = 1, \ldots, n$*, und analog* $\mu_i = \mathrm{NP}_g(i) - \mathrm{NP}_g(i-1)$ *und* $\nu_i = \mathrm{NP}_h(i) - \mathrm{NP}_h(i-1)$*, so erhält man die Folge* $\nu_1, \ldots, \nu_{m+n}$*, indem man die Folge* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ *aufsteigend sortiert.*

Korollar 1.6.6 (Verallgemeinertes Eisensteinsches Irreduzibilitäts-Kriterium) *Sei* $f \in K[X]$ *ein Polynom vom Grad* n *über einem Körper* K*. Wenn eine Bewertung auf* K *existiert, so dass* $\mathrm{NP}_f(\ell) \notin \Gamma$ *für* $1 \le \ell \le n-1$ *gilt, so ist* f *irreduzibel.*

1.7 Henselsche Körper

Definition 1.7.1 *Ein bewerteter Körper* K *heißt* ***henselsch****, wenn gilt: Sind* $f \in \mathcal{O}_K[X]$ *und* $a \in \mathcal{O}_K$ *mit* $v(f(a)) > 0$ *und* $v(f'(a)) = 0$*, so existiert (mindestens) ein* $a_0 \in \mathcal{O}_K$ *mit* $f(a_0) = 0$ *und* $v(a_0 - a) > 0$*.*

Satz 1.7.2 (Hensels Lemma) *Sei* K *ein bewerteter Körper mit Wertegruppe* $\Gamma = \mathbb{Z}$*, der vollständig ist bezüglich der Metrik* $d(a,b) := 2^{-v(a-b)}$*. Dann ist* K *henselsch.*

Bemerkung 1.7.3 *Eine zu Definition 1.7.1 äquivalente Formulierung ist:* K *ist henselsch, wenn für jedes* $f \in \mathcal{O}_K[X]$ *gilt: Jede einfache Nullstelle* $\bar{a} \in \bar{K}$ *von* $\mathrm{res}(f)$ *lässt sich zu einer Nullstelle* $b \in \mathrm{res}^{-1}(\bar{a})$ *von* f *liften.*

Satz 1.7.4 (Newtons Lemma) *Sei* K *wie in Satz* **??** *bewerteter Körper mit Wertegruppe* $\Gamma = \mathbb{Z}$*, sei* $f \in \mathcal{O}_K[X]$ *ein Polynom, und sei* $a \in \mathcal{O}_K$ *so, dass* $v(f(a)) > 2v(f'(a))$ *gilt. Dann existiert genau ein* $b \in \mathcal{O}_K$ *mit* $f(b) = 0$ *und* $v(b-a) \ge v(f(a)) - v(f'(a))$*.*

Bemerkung 1.7.5 *In henselschen Körpern gilt sogar Newtons Lemma (Übung).*

Beispiel 1.7.6 *Algebraisch abgeschlossene bewertete Körper sind henselsch.*

Beispiel 1.7.7 *Der Körper* $\mathbb{R}^* \succ \mathbb{R}$ *mit der Bewertung aus Beispiel 1.4.8 ist henselsch.*

Bemerkung 1.7.8 *Man kann zeigen: Ein bewerteter Körper* K *ist henselsch genau dann, wenn die Bewertung von* K *genau eine Fortsetzung auf den algebraischen Abschluss* K^{alg} *besitzt.*

Bemerkung 1.7.9 *Man kann zeigen: Zu jedem bewerteten Körper* K *gibt es einen kleinsten henselschen bewerteten Körper* $K^h \subseteq K^{\mathrm{alg}}$*, der* K *enthält.* K^h *ist (als bewerteter Körper) eindeutig bis auf Automorphismus über* K *und heißt* ***henselsche Hülle*** *von* K*.*

Bemerkung 1.7.10 *Man kann zeigen: Ist K Körper mit Betrag und $\hat{K}$ die Vervollständigung, so ist $K^h = \hat{K} \cap K^{\mathrm{alg}}$.*

1.8 Anwendung auf diophantische Gleichungen

Konvention: Alle Ringe sind kommutativ und mit 1.

Notation 1.8.1 *Sei $\underline{f} := (f_1, \dots, f_\ell) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$ ein Tupel von Polynomen und sei R ein Ring. Dann schreiben wir*

$$V_{\underline{f}}(R) := \{\underline{a} \in R^n \mid f_1(\underline{a}) = \cdots = f_\ell(\underline{a}) = 0\}$$

für die Lösungen des Gleichungssystems „$\underline{f} = 0$“ in R^n.

Bemerkung 1.8.2 *Die Lösbarkeit von diophantischen Gleichungen ist unentscheidbar: Es gibt keinen Algorithmus, der ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ nimmt und entscheidet, ob $V_f(\mathbb{Z})$ nicht-leer ist.*

Bemerkung 1.8.3 *Ist $V_{\underline{f}}(\mathbb{Z})$ nicht-leer, so ist auch $V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ nicht-leer für alle $m \geq 1$.*

Lemma 1.8.4 *Sei $\underline{f} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$ und $m \geq 1$. Ist $m = \prod_i p_i^{r_i}$ die Primfaktorzerlegung von m, so ist $\#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \prod_i \#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p_i^{r_i}\mathbb{Z})$.*

Bemerkung 1.8.5 *Für jede Primzahl p und jedes $r \geq 0$ gilt: $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p$, also insbesondere $\#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = \#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p)$.*

Definition 1.8.6 *Sei $\underline{f} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$ und p prim. Die **Poincaré-Reihe** zu $\underline{f}$ ist die formale Potenzreihe*

$$P_{\underline{f},p}(Z) := \sum_{r \in \mathbb{N}} N_r Z^r \in \mathbb{Q}[[Z]],$$

für $N_r := \#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$.

Satz 1.8.7 *Sei $\underline{f} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$ und p prim. Die Poincaré-Reihe $P_{\underline{f},p}(Z)$ ist eine rationale Funktion in Z, d. h. $P_{\underline{f},p}(Z) \in \mathbb{Q}(Z)$.*

Beispiel 1.8.8 *Ist f das Null-Polynom in n Variablen, so ist $P_{f,p}(Z) = \frac{1}{1-p^n Z}$.*

Satz 1.8.9 *Sei $\underline{f} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^\ell$. Dann existieren ein Polynom $h \in \mathbb{Z}[Z, P]$ und Ringformeln $\phi_0, \dots, \phi_m$, $\phi'_0, \dots, \phi'_m$, so dass für jede Primzahl p gilt:*

$$P_{\underline{f},p}(Z) = \frac{\sum_{i=0}^m (\#\phi_i(\mathbb{F}_p) - \#\phi'_i(\mathbb{F}_p))Z^i}{h(Z,p)}.$$

2 Quantorenelimination in bewerteten Körpern

Im gesamten Kapitel ist (K, v) ein bewerteter Körper mit Wertegruppe Γ, Bewertungsring $\mathcal{O}_K$, maximalem Ideal $\mathcal{M}_K \subseteq \mathcal{O}_K$ und Restklassenkörper $\bar{K}$.

2.1 Leitterme

Definition 2.1.1 *Eine* ***anguläre Komponente*** *auf einem bewerteten Körper K ist ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{ac}\colon K^\times \to \bar{K}^\times$, der auf $\mathcal{O}_K^\times$ mit res übereinstimmt. Wir setzen außerdem $\mathrm{ac}(0) := 0$.*

Satz 2.1.2 *Sei K ein bewerteter Körper, aufgefasst als Struktur in einer beliebigen Sprache (in der sich ausdrücken lässt, dass K ein bewerteter Körper ist). Dann besitzt K eine elementare Erweiterung $K' \succ K$, auf der eine anguläre Komponente existiert.*

Bemerkung 2.1.3 *$1 + \mathcal{M}_K$ ist eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $K^\times$.*

Definition 2.1.4 *Wir setzen $\mathrm{RV}^\times := K^\times/(1 + \mathcal{M}_K)$ und $\mathrm{RV} := \mathrm{RV}^\times \cup \{0\}$ und schreiben $\mathrm{rv}\colon K \to \mathrm{RV}$ für die kanonische Abbildung $K^\times \to \mathrm{RV}^\times$, fortgesetzt durch $0 \mapsto 0$. Für $a \in K$ nennt man $\mathrm{rv}(a)$ den* ***Leitterm*** *von a, und RV ist die* ***Leittermstruktur****. Für die Gruppe $\mathrm{RV}^\times$ verwenden wir multiplikative Notation. Außerdem setzen wir $0 \cdot \xi = 0$ für $\xi \in \mathrm{RV}$.*

Bemerkung 2.1.5 *Für $a, b \in K$ gilt $\mathrm{rv}(a) = \mathrm{rv}(b)$ genau dann, wenn $v(a - b) > v(a)$ ist oder $a = b = 0$.*

Beispiel 2.1.6 *Im Fall $K = k((t))$ bilden die Elemente der Form $at^m \in K$ (für $a \in k$, $m \in \mathbb{Z}$) ein Repräsentantensystem von $\mathrm{RV}^\times$; es gilt $\mathrm{RV}^\times \cong k^\times \times \Gamma$ (als Gruppen).*

Bemerkung 2.1.7 *Die Bewertung $v\colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ faktorisiert über RV, d. h., es existiert eine Abbildung $v_{\mathrm{RV}}\colon \mathrm{RV} \to \Gamma \cup \{\infty\}$, so dass $v = v_{\mathrm{RV}} \circ \mathrm{rv}$ gilt. Die Einschränkung $v_{\mathrm{RV}}|_{\mathrm{RV}^\times}$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathrm{RV}^\times, \cdot)$ nach $(\Gamma, +)$. Außerdem induziert rv einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\bar{K}^\times \to \mathrm{RV}^\times$, dessen Bild genau der Kern von $v_{\mathrm{RV}}|_{\mathrm{RV}^\times}$ ist.*

Bemerkung 2.1.8 *Die Fasern $F = \mathrm{rv}^{-1}(\zeta)$ der Abbildung rv (für $\zeta \in \mathrm{RV}$) sind genau die Menge $\{0\}$ und die maximalen offenen Bälle, die 0 nicht enthalten; also $F = B_{>v_{\mathrm{RV}}(\zeta)}(a)$, für $a \in \mathrm{rv}^{-1}(\zeta)$ beliebig.*

Bemerkung 2.1.9 *Jede anguläre Komponente* $\mathrm{ac}\colon K \to \bar{K}$ *faktorisiert über* rv, *d.h. sie lässt sich als Verknüpfung* $\mathrm{ac} = \mathrm{ac}_{\mathrm{RV}} \circ \mathrm{rv}$ *schreiben, für eine Abbildung* $\mathrm{ac}_{\mathrm{RV}}\colon \mathrm{RV} \to \bar{K}$. *Dies liefert einen Gruppen-Isomorphismus* $\mathrm{RV}^\times \to \bar{K}^\times \times \Gamma, \xi \mapsto (\mathrm{ac}_{\mathrm{RV}}(\xi), v_{\mathrm{RV}}(\xi))$.

Notation 2.1.10 *Seien* $\xi_1, \dots, \xi_n, \zeta \in \mathrm{RV}$. *Wenn* $a_i \in K$ *existieren mit* $\mathrm{rv}(a_i) = \xi_i$ *und* $\mathrm{rv}(a_1 + \dots + a_n) = \zeta$, *so schreiben wir* $\zeta \approx \xi_1 + \dots + \xi_n$. *Wenn genau ein* ζ *existiert mit* $\zeta \approx \xi_1 + \dots + \xi_n$, *so sagen wir,* $\xi_1 + \dots + \xi_n$ *ist* ***wohldefiniert****, und wir schreiben* $\zeta = \xi_1 + \dots + \xi_n$. *Außerdem setzen wir* $-\xi_1 := \mathrm{rv}(-1) \cdot \xi_1$.

Lemma 2.1.11 *Seien* $a_1, \dots, a_n \in K$. *Dann ist* $\mathrm{rv}(a_1) + \dots + \mathrm{rv}(a_n)$ *wohldefiniert genau dann, wenn* $v(a_1 + \dots + a_n) = \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$ *ist. Ist dies nicht der Fall, so gilt* $\mathrm{rv}(a_1) + \dots + \mathrm{rv}(a_n) \approx \zeta$ *genau für diejenigen* $\zeta \in \mathrm{RV}$, *die* $v(\zeta) > \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$ *erfüllen.*

2.2 Quantorenelimination: Die Aussagen

Definition 2.2.1 *Wir definieren die folgenden Sprachen auf bewerteten Körpern* K. *(Die Namen der Sorten bedeuten:* VF = *valued field;* VG = *value group;* RF = *residue field.)*

(a) L_{VG} *besteht aus einer Sorte* VF *für* K *mit* L_{ring}, *einer Sorte* VG *für* $\Gamma \cup \{\infty\}$ *mit* $L_{\mathrm{oag}} \cup \{\infty\}$ *und der Bewertung* $v\colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$.
(b) $L_{\mathcal{O}} = L_{\mathrm{ring}} \cup \{\mathcal{O}\}$, *wobei* $\mathcal{O}$ *ein Prädikat für den Bewertungsring* $\mathcal{O}_K$ *ist.*
(c) L_{RV} *besteht aus: einer Sorte* VF *für* K *mit* L_{ring}*; einer Sorte für* RV *mit* $\{\cdot, 1, \xi_1 + \xi_2 \approx \zeta, -\}$, *wobei „*$\xi_1 + \xi_2 \approx \zeta$*" eine dreistellige Relation ist; und der Abbildung* $\mathrm{rv}\colon K \to \mathrm{RV}$.
(d) $L_{\mathrm{VG,RF}}$ *besteht aus* L_{VG}, *einer zusätzlichen Sorte* RF *für* $\bar{K}$ *mit* L_{ring} *und der Abbildung* $\mathrm{res}\colon \mathcal{O}_K \to \bar{K}$. *Formal setzt man* $\mathrm{res}(a) = 0$ *für* $a \in K \setminus \mathcal{O}_K$.
(e) *Falls* K *eine anguläre Komponente hat: Die* ***Denef-Pas-Sprache*** L_{DP} *besteht aus* $L_{\mathrm{VG,RF}}$ *und zusätzlich der Abbildung* $\mathrm{ac}\colon K \to \bar{K}$.
(f) *Für beliebige Körper* K*: Die* ***Macintyre-Sprache*** *ist* $L_{\mathrm{Mac}} := L_{\mathrm{ring}} \cup \{P_n \mid n \geq 2\}$, *wobei* P_n *ein Prädikat für die* n*-ten Potenzen ist, also* $P_n(a) \iff \exists b\colon b^n = a$.

Bemerkung 2.2.2 *In den Sprachen* L_Γ, $L_{\mathcal{O}}$, L_{RV} *und* $L_{\Gamma,\mathrm{RF}}$ *sind genau die gleichen Dinge definierbar. Insbesondere haben sie die gleichen imaginären Sorten.*

Bemerkung 2.2.3 (a) *In jeder der Sprachen* L_Γ, $L_{\mathcal{O}}$, L_{RV} *und* $L_{\Gamma,\mathrm{RF}}$ *existiert eine Theorie, deren Modelle genau die bewerteten Körper sind (und die Sorten der Sprache sind das, was sie sein sollen).*
(b) *In der Sprache* L_{DP} *existiert eine Theorie, deren Modelle genau die bewerteten Körper mit angulärer Komponente sind.*

(c) *In jeder dieser fünf Sprachen lässt sich durch eine Menge von Aussagen ausdrücken, dass der bewertete Körper henselsch ist.*

Definition 2.2.4 *Seien (p, q) eine mögliche Charakteristik von bewerteten Körpern (vgl. Bemerkung 1.4.10).*

Wir schreiben HEN *für die Theorie der henselschen bewerteten Körper (meistens in der Sprache L_{RV}). Ist p eine Primzahl oder 0, so setze* $\mathrm{HEN}_p := \mathrm{HEN} \cup \{$„$\mathrm{char}\, K = p$“$\}$. *Ist q auch eine Primzahl oder 0 (wobei $q = p$ falls $p \neq 0$), so setze* $\mathrm{HEN}_{p,q} := \mathrm{HEN}_p \cup \{$„$\mathrm{char}\, \bar{K} = q$“$\}$.

Definition 2.2.5 *Eine* RV***-Erweiterung*** *von L_{RV} ist eine Sprache $L \supseteq L_{\mathrm{RV}}$, so dass $L \setminus L_{\mathrm{RV}}$ „nur auf* RV *lebt“, d. h. nur aus Konstanten in* RV*, Funktionssymbolen* $\mathrm{RV}^\ell \to \mathrm{RV}$ *und Relationssymbolen auf* RV^ℓ *besteht.*

Definition 2.2.6 *Sei L eine* RV*-Erweiterung von L_{RV}. Wir nennen eine L-Formel* VF***-quantorenfrei*** *(kurz: „*VF*-qf“), wenn sie keine Quantoren über Variablen der Sorte* VF *enthält.*

Satz 2.2.7 *Sei $L \supseteq L_{\mathrm{RV}}$ eine* RV*-Erweiterung und sei $T \supseteq \mathrm{HEN}_{0,0}$ eine L-Theorie. Dann ist jede L-Formel ist modulo T äquivalent zu einer* VF*-quantorenfreien L-Formel.*

Bemerkung 2.2.8 *Es existiert eine Variante der Sprache L_{RV}, in der Satz 2.2.7 auch für $T \subseteq \mathrm{HEN}_0$ gilt (also für beliebige Restklassenkörper-Charakteristik).*

Korollar 2.2.9 *Sei $L \supseteq L_{\mathrm{RV}}$ eine* RV*-Erweiterung und sei $T \supseteq \mathrm{HEN}_0$ eine L-Theorie. Dann existiert für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ ein $N_0 > 0$ und eine* VF*-quantorenfreie L-Formel $\psi(\underline{x})$, so dass gilt: Ist $K \models T$ ein Modell mit $\mathrm{char}\, \bar{K} = 0$ oder $\mathrm{char}\, \bar{K} > N_0$, so ist $\phi(K) = \psi(K)$.*

2.3 Polynome und rv

Im gesamten Abschnitt sei K ein henselscher bewerteter Körper der Charakteristik $(0, 0)$.

Definition 2.3.1 *Sei $f = \sum_i a_i X^i \in K[X]$ und $b \in K$. Wir sagen, f hat eine* ***Kollision*** *bei b, wenn $v(f(b)) > \min_i v(a_i b^i)$ ist.*

Bemerkung 2.3.2 *f hat keine Kollision bei b genau dann, wenn $\sum_i \mathrm{rv}(a_i)\, \mathrm{rv}(b)^i$ wohldefiniert ist. In diesem Fall ist die Summe gleich $\mathrm{rv}(f(b))$.*

Definition 2.3.3 *Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n. Wir nennen ein $c \in K$ eine „**Nullstelle einer Ableitung** von f“, wenn ein $0 \leq \ell \leq n$ existiert, so dass $f^{(\ell)}(c) = 0$ ist. (Hierbei bezeichnet $f^{(\ell)}$ die ℓ-te Ableitung von f.) Ist $\ell \geq 1$, so nennen wir c eine „**Nullstelle einer echten Ableitung** von f“.*

Lemma 2.3.4 *Sei $f \in K[X]$ ein Polynom. Dann hat die Menge der $b \in K$, an denen f eine Kollision hat, die Form*

$$\{b \in K \mid \exists c \in C\colon \operatorname{rv}(b) = \operatorname{rv}(c)\},$$

wobei $C \subseteq K$ eine Teilmenge der Nullstellen der Ableitungen von f ist.

Definition 2.3.5 *Sei $f \in K[X]$ und seien $b, c \in K$. Wir sagen, f hat eine **um-c-Kollision** bei b, wenn das um c verschobene Polynom $g(X) := f(X + c)$ eine Kollision bei $b - c$ hat.*

Bemerkung 2.3.6 *Schreiben wir $f(X + c) =: g(X) = \sum_i a'_i X^i$, so hat f keine um-c-Kollision bei b genau dann, wenn $\operatorname{rv}(f(c)) = \sum_i \operatorname{rv}(a'_i) \cdot \operatorname{rv}(b - c)^i$ gilt.*

Lemma 2.3.7 *Es existiert eine VF-qf-Formel η so dass $\eta(a_0, \ldots, a_n, \operatorname{rv}(b-c), c, \zeta)$ genau dann gilt (für $a_i, b, c \in K, \zeta \in \mathrm{RV}$), wenn das Polynom $f = \sum a_i X^i$ keine um-c-Kollision bei b hat und außerdem $\operatorname{rv}(f(b)) = \zeta$ gilt.*

Lemma 2.3.8 *Seien $f \in K[X]$ und $b \in K$ gegeben, und sei c eine Nullstelle einer Ableitung von f, so dass $v(b - c)$ maximal ist. Dann hat f keine um-c-Kollision bei b.*

Lemma 2.3.9 *Sei $f \in K[X]$ ein Polynom. Wir nehmen an, dass f mit keiner seiner echten Ableitungen eine gemeinsame Nullstelle hat. Sei außerdem $\zeta \in \mathrm{RV}^\times$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

(a) *Es existiert eine Nullstelle $b \in K$ von f mit $\operatorname{rv}(b) = \zeta$.*
(b) *Es existiert ein $b \in K$ mit $\operatorname{rv}(b) = \zeta$, so dass f eine um-c-Kollision bei b hat sowohl für $c = 0$ als auch für jede Nullstelle c jeder echten Ableitung von f.*

2.4 Beweis von Quantorenelimination

Lemma 2.4.1 *Seien $f_i(x, \underline{z}) \in \mathbb{Z}[x, \underline{z}]$ für $i = 1, 2$, wobei $\underline{z}$ ein N-Tupel ist. Dann existieren endlich viele quantorenfreie L_{ring}-Formeln $\phi_\ell(\underline{z})$ und Polynome $g_\ell(x, \underline{z}), h_{i,\ell}(x, \underline{z}) \in \mathbb{Z}[x, \underline{z}], d_{i,\ell}(\underline{z})$ so dass für jeden Körper K und jedes Tupel $\underline{c} \in K^n$ gilt:*

(a) *Es gibt genau ein ℓ, so dass $K \models \phi_\ell(\underline{c})$ gilt.*
(b) *Für das ℓ aus (a) gilt:*
  (i) *$g_\ell(x, \underline{c})$ ist der ggT von $f_1(x, \underline{c})$ und $f_2(x, \underline{c})$ (bis auf einen Faktor in $K^\times$);*

(ii) $d_i(\underline{c}) \neq 0$ *für* $i = 1, 2$*;*
(iii) $d_i(\underline{c}) \cdot f_i(x, \underline{c}) = h_{i,\ell}(x, \underline{c}) \cdot g_\ell(x, \underline{c})$ *für* $i = 1, 2$.

Wir arbeiten in einer RV-Erweiterung $L \supseteq L_{\mathrm{RV}}$ wie in Satz 2.2.7 und in $\mathrm{HEN}_{0,0}$ (als L-Theorie aufgefasst). Im Folgenden ist x immer eine VF-Variable, $\underline{z}$ ein Tupel von VF-Variablen und $\underline{\zeta}$ ein Tupel von RV-Variablen.

Lemma 2.4.2 *Satz 2.2.7 folgt aus: Für jede* VF*-qf-Formel* $\phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})$ *ist* $\exists x \phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})$ *zu einer* VF*-qf-Formel äquivalent.*

Im Folgenden sind $m, n, r \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}, b_j, c_i \in \mathbb{Z}[\underline{z}]$, $f_i = \sum_{j \le m} a_{i,j} x^j$, $g = \sum_{j \le n} b_j x^j \in \mathbb{Z}[x, \underline{z}]$. Außerdem ist $\phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})$ eine VF-qf-Formel. Für jede der folgenden Formen von Formeln $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta})$ führen wir eine Bezeichnungen ein für die Behauptung, dass jede Formel dieser Form äquivalent zu einer VF-qf-Formel ist:

(B) $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = \exists x\colon \phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})$
(P) $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = \exists x\colon \bigwedge_{i \le r} \mathrm{rv}(f_i(x, \underline{z})) = \zeta_i$
(L) $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = \exists x\colon \bigwedge_{i \le r} \mathrm{rv}(x + c_i(\underline{z})) = \zeta_i$
$(\mathrm{EB})_n$ $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = b_n(\underline{z}) \neq 0 \wedge \exists x\colon \big(g(x, \underline{z}) = 0 \wedge \phi(x, \underline{z}, \underline{\zeta})\big)$
$(\mathrm{EP})_n$ $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = b_n(\underline{z}) \neq 0 \wedge \exists x\colon \Big(g(x, \underline{z}) = 0 \wedge \bigwedge_{i \le r} \mathrm{rv}(f_i(x, \underline{z})) = \zeta_i\Big)$
$(\mathrm{EL})_n$ $\psi(\underline{z}, \underline{\zeta}) = b_n(\underline{z}) \neq 0 \wedge \exists x\colon \Big(g(x, \underline{z}) = 0 \wedge \bigwedge_{i \le r} \mathrm{rv}(x + c_i(\underline{z})) = \zeta_i\Big)$

(B = beliebig, P = polynomial, L = linear, E = endlich).

Lemma 2.4.3 (a) *Aus (P) folgt (B).*
(b) *Aus (L) und* $(EB)_n$ *für alle* n *folgt (P).*
(c) *(L) ist wahr.*
(d) *Aus* $(EP)_n$ *folgt* $(EB)_n$.
(e) $(EP)_0$ *ist wahr, und für* $n \ge 1$ *gilt: Aus* $(EL)_n$ *und* $(EB)_{n'}$ *für alle* $n' < n$ *folgt* $(EP)_n$.
(f) $(EL)_0$ *ist wahr, und für* $n \ge 1$ *gilt: Aus (L) und* $(EB)_{n'}$ *für alle* $n' < n$ *folgt* $(EL)_n$.

2.5 Der Satz von Ax-Kochen/Ershov und andere Folgerungen

Korollar 2.5.1 *Sei* $L \supseteq L_{\mathrm{DP}}$ *eine* RF-VG*-Erweiterung (d. h. durch Symbole, die nur auf* RF *und* VG *leben) und sei* $T \supseteq \mathrm{HEN}_{0,0}$ *eine* L*-Theorie. Dann ist jede* L*-Formel ist modulo* T *äquivalent zu einer* VF*-quantorenfreien* L*-Formel.*

Korollar 2.5.2 *Sei* $\underline{x}$ *ein Tupel von* VF*-Variablen,* $\underline{y}$ *ein Tupel von* RF*-Variablen und* $\underline{\lambda}$ *ein Tupel von* VG*-Variablen. Jede* L_{DP}*-Formel* $\phi(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda})$ *ist äquivalent zu* *einer endlichen boolschen Kombination von Formeln der Formen* $\psi((\mathrm{ac}(f_i(\underline{x}))_i, \underline{y})$ *für* L_{ring}*-Formen* ψ *und* $\psi'((v(f_i(\underline{x}))_i, \underline{\lambda})$ *für* L_{oag}*-Formeln* ψ'.

Definition 2.5.3 *Sei* L *eine Sprache und* S *eine Sorte von* L*. Die auf* S ***induzierte Sprache*** *ist die Sprache* L' *bestehend aus einem Relationssymbol für jede Formel, die eine Teilmenge von* S^n *definiert. Jede* L*-Struktur* $\mathcal{M}$ *liefert eine* L'*-Struktur mit Grundmenge* $S^{\mathcal{M}}$*; diese nennen wir die von* L *auf* S ***induzierte Struktur****.*

Korollar 2.5.4 *Sei* $K \models \mathrm{HEN}_{0,0}$*, in der Sprache* L_{DP}*.*

(a) *Die auf* $\bar{K}$ *induzierte Struktur ist die* L_{ring}*-Struktur (bis auf Interdefinierbarkeit).*
(b) *Die auf* Γ *induzierte Struktur ist die* L_{oag}*-Struktur (bis auf Interdefinierbarkeit).*

Korollar 2.5.5 (Satz von Ax-Kochen/Ershov, elementare-Äquivalenz-Version) *Sei* L *entweder* L_{RV} *oder* L_{DP}*. Sind* K_1 *und* K_2 *Modelle der* L*-Theorie* $\mathrm{HEN}_{0,0}$ *mit* $\bar{K}_1 \equiv_{L_{\mathrm{ring}}} \bar{K}_2$ *und* $\Gamma_{K_1} \equiv_{L_{\mathrm{oag}}} \Gamma_{K_2}$*, so ist bereits* $K_1 \equiv_L K_2$*.*

Korollar 2.5.6 (Satz von Ax-Kochen/Ershov, Transferprinzip-Version) *Sei* L *entweder* L_{RV} *oder* L_{DP}*, und sei* ϕ *eine* L*-Aussage. Dann existiert ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* L*-Strukturen* $K_1, K_2 \models \mathrm{HEN}$ *gilt: Ist* $\bar{K}_1 \equiv_{L_{\mathrm{ring}}} \bar{K}_2$*,* $\Gamma_{K_1} \equiv_{L_{\mathrm{oag}}} \Gamma_{K_2}$*, und ist* $\mathrm{char}\, \bar{K}_i$ *entweder* 0 *oder größer as* N *(für* $i = 1, 2$*), so gilt*

$$K_1 \models \phi \iff K_2 \models \phi.$$

Korollar 2.5.7 *Ist* $\mathcal{U}$ *ein beliebiger freier Ultrafilter auf der Menge* $\mathbb{P}$ *der Primzahlen, so gilt* $\prod_p \mathbb{Q}_p/\mathcal{U} \equiv \prod_p \mathbb{F}(\!(t)\!)/\mathcal{U}$*.*

Bemerkung 2.5.8 *Korollare 2.5.5 und 2.5.6 gelten auch in* RF*-Erweiterungen von* VG*-Erweiterungen von* L_{DP}*, wenn man* $\bar{K}_1 \equiv \bar{K}_2$ *und* $\Gamma_{K_1} \equiv \Gamma_{K_2}$ *für die entsprechenden induzierten Strukturen fordert.*

Definition 2.5.9 *Seien* (p, q) *eine mögliche Charakteristik von bewerteten Körpern (vgl. Bemerkung 1.4.10). Wir schreiben* ACVF *für die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper mit nicht-trivialer Bewertung (in einer geeigneten Sprache),* $\mathrm{ACVF}_p \supseteq \mathrm{ACVF}$ *für die Theorie, die zusätzlich* $\mathrm{char}\, K = p$ *besagt und* $\mathrm{ACVF}_{p,q} \supseteq \mathrm{ACVF}_p$ *für die Theorie, die zusätzlich auch noch* $\mathrm{char}\, \bar{K} = q$ *besagt.*

Korollar 2.5.10 $\mathrm{ACVF}_{0,0}$ *hat in der Sprache* L_{DP} *(vollständig) Quantoren-Elimination. Außerdem ist* $\mathrm{ACVF}_{0,0}$ *vollständig.*

3 Geometrie in $\mathrm{HEN}_{0,0}$

Wenn nicht anders angegeben, ist im gesamten Kapitel $L \supseteq L_{\mathrm{RV}}$ eine RV-Erweiterung, und wir arbeiten in der Theorie $\mathrm{HEN}_{0,0}$. Manchmal werden wir auch imaginäre Sorten von L_{RV} verwenden (insbesondere VG).

K ist immer eine L-Struktur, die ein Modell von $\mathrm{HEN}_{0,0}$ ist, und $A \subseteq K \cup \mathrm{RV}$ ist immer eine Parametermenge.

Variablen x, y, z sind immer VF-Variablen; Variablen ξ, ζ sind immer RV-Variablen.

3.1 Dimension

Notation 3.1.1 *Wir schreiben $\mathrm{acl}_{\mathrm{VF}}(A)$ für den algebraischen Abschluss von A innerhalb der Sorte K, also für die Vereinigung aller endlichen A-definierbaren Teilmengen von K.*

In den folgenden beiden Lemmas sei R der von $A \cap K$ erzeugte Unterring von K.

Lemma 3.1.2 *Sei $X \subseteq K^n$ A-definierbar; wir schreiben ∂X für den (topologische) Rand von X, d. h. der Abschluss von X ohne das Innere von X. Dann existiert ein Polynom $f \in R[\underline{x}] \setminus \{0\}$, so dass $f(\underline{b}) = 0$ für jedes $\underline{b} \in \partial X$ gilt.*

Lemma 3.1.3 *Der algebraische Abschluss $\mathrm{acl}_{\mathrm{VF}}(A)$ besteht genau aus den Nullstellen von Polynomen $f \in R[x] \setminus \{0\}$. Insbesondere gilt $\mathrm{acl}_{\mathrm{VF}}(A \cap K) = \mathrm{acl}_{\mathrm{VF}}(A) = \mathrm{acl}_{\mathrm{VF}}(A \cup \mathrm{RV})$.*

Satz 3.1.4 *In $\mathrm{HEN}_{0,0}$ hat $\mathrm{acl}_{\mathrm{VF}}$ die Austauscheigenschaft. Genauer gilt: Sind $A \subseteq K \cup \mathrm{RV}$ und $b, c \in K$ mit $b \in \mathrm{acl}(Ac) \setminus \mathrm{acl}(A)$, so ist $c \in \mathrm{acl}(Ab)$.*

Definition 3.1.5 *Den acl-Rang einer definierbaren Menge $X \subseteq K^n$ bezeichnen wir auch als **Dimension** von X, und wir schreiben $\dim X$ dafür.*

Satz 3.1.6 *Seien $X, X' \subseteq K^m$ und $Y \subseteq K^n$ definierbare Mengen. Dann gilt:*

(a) $\dim(X) = 0$ *genau dann, wenn X endlich aber nicht leer ist.*
(b) $\dim(K) = 1$.
(c) $\dim(X \cup X') = \max\{\dim(X), \dim(X')\}$.
Insbesondere: $X \subseteq X' \Rightarrow \dim(X) \leq \dim(X')$.
(d) *Sei $f\colon X \to Y$ eine definierbare Abbildung. Dann ist für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Menge $Y_d := \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) = d\}$ definierbar, und es gilt:*

$$\dim X = \max_d(\dim Y_d + d).$$

Insbesondere gilt $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$, und wenn eine definierbare Bijektion $f\colon X \to Y$ existiert, dann ist $\dim(X) = \dim(Y)$.

Lemma 3.1.7 *Eine definierbare Teilmenge $X \subseteq K^n$ ist n-dimensional genau dann, wenn sie nicht-leeres Inneres hat (also einen Ball enthält).*

Lemma 3.1.8 $\mathrm{HEN}_{0,0}$ *eliminiert $\exists^\infty$ in der Sorte* VF*, d. h. zu jeder L-Formel $\phi(x, \underline{y}, \underline{\zeta})$ (wobei x eine* VF*-Variable ist) existiert eine L-Formel $\psi(\underline{y}, \underline{\zeta})$, so dass für jedes Modell $K \models \mathrm{HEN}_{0,0}$ und jedes Tupel $(\underline{b}, \underline{\gamma}) \in K^n \times \mathrm{RV}^m$ gilt: $K \models \psi(\underline{b}, \underline{\gamma})$ genau dann, wenn die Menge $\phi(K, \underline{b}, \underline{\gamma})$ unendlich ist.*

Satz 3.1.9 *Die Dimension einer definierbaren Menge $X \subseteq K^n$ ist die größte Zahl $d \leq n$, so dass eine Projektion $\pi\colon K^n \to K^d$ auf eine Teilmenge der Koordinaten existiert, so dass $\pi(X)$ einen Ball enthält.*

3.2 Zerlegung in krumme Quader

Definition 3.2.1 *Sei $C \subseteq K$ eine beliebige Teilmenge. Wir sagen, dass zwei Elemente $b, b' \in K$ durch C* ***getrennt*** *werden, wenn ein $c \in C$ existiert mit $\mathrm{rv}(b-c) \neq \mathrm{rv}(b'-c)$. Wir schreiben $b \sim_C b'$, wenn b und b' nicht durch C getrennt werden.*

Bemerkung 3.2.2 *Für $b, b' \in K$ gilt $b \sim_C b'$ genau dann, wenn ein Ball $B \subseteq K$ existiert, der sowohl b als auch b' enthält aber disjunkt zu C ist.*

Bemerkung 3.2.3 *Ist $C \subseteq K$ endlich, so ist jede $\sim_C$-Äquivalenzklasse entweder eine ein-Punkt-Menge oder ein offener Ball.*

Lemma 3.2.4 *Sei $A \subseteq K$, $C := \mathrm{acl}_{\mathrm{VF}}(A)$ und seien $b, b' \in K$. Wenn $b \sim_C b'$ gilt, dann haben b und b' den selben Typ über $A \cup \mathrm{RV}$.*

Notation 3.2.5 *Ist im Folgenden $X \subseteq K^n \times \mathrm{RV}^m$, so verwenden wir die folgenden Notationen für Fasern:*

(a) *Für $\underline{b} \in K^n$ setzen wir $X_{\underline{b}} = \{\underline{\xi} \in \mathrm{RV}^m \mid (\underline{b}, \underline{\xi}) \in X\}$.*
(b) *Für $\underline{\xi} \in \mathrm{RV}^m$ setzen wir $X_{\underline{\xi}} := \{\underline{b} \in K^n \mid (\underline{b}, \underline{\xi}) \in X\}$.*

Lemma 3.2.6 *Sei $X \subseteq K \times \mathrm{RV}^m$ $(A \cup \mathrm{RV})$-definierbar, für $A \subseteq K$. Dann existiert eine endliche A-definierbare Menge $C \subseteq K$, so dass gilt: Werden $b, b' \in K$ nicht von C getrennt, so ist $X_b = X_{b'}$.*

Bemerkung 3.2.7 *Anders ausgedrückt: Für X, C wie in dem Lemma gilt: Für jedes $\underline{\xi} \in \mathrm{RV}^m$ ist $X_{\underline{\xi}}$ eine Vereinigung von $\sim_C$-Äquivalenzklassen.*

Definition 3.2.8 *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Gamma \cup \{\infty\}$. Ein* ***krummer Quader*** *mit Radien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist eine definierbare Teilmenge $Q \subseteq K^n$ der folgenden Form:*

(a) *Im Fall* $n = 1$*:* Q *ist ein offener Ball mit Radius* λ_1 *(falls* $\lambda_1 < \infty$*), oder ein Punkt (falls* $\lambda_1 = \infty$*).*

(b) *Im Fall* $n > 1$*: Die Projektion* $Q' := \pi(Q) \subseteq K^{n-1}$ *auf die ersten* $n-1$ *Koordinaten ist ein krummer Quader mit Radien* $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$*, und für jedes* $\underline{x} \in Q'$ *ist die Faser* $\{y \in K \mid (\underline{x}, y) \in Q\}$ *ein krummer Quader mit Radius* λ_n*.*

Satz 3.2.9 *Sei* $X \subseteq K^n \times \mathrm{RV}^m$ *A-definierbar. Dann existiert eine A-definierbare Abbildung* $f\colon K^n \to \mathrm{RV}^k$*, deren nicht-leere Fasern krumme Quader sind, und so dass für* $\underline{b}, \underline{b}' \in K^n$ *gilt: Ist* $f(\underline{b}) = f(\underline{b}')$ *so ist* $X_{\underline{b}} = X_{\underline{b}'}$*.*

Bemerkung 3.2.10 *Anders ausgedrückt: Für* X, f *wie im Satz gilt: Jede der Mengen* $X_{\underline{\xi}}$ *(für* $\underline{\xi} \in \mathrm{RV}^m$*) ist das Urbild unter* f *einer Menge* $Y_{\underline{\xi}} \subseteq \mathrm{RV}^k$*; insbesondere ist* $X_{\underline{\xi}}$ *eine Vereinigung von krummen Quadern.*

Bemerkung 3.2.11 *Der Satz gilt auch, wenn wir* RV^m *durch* $\mathrm{RV}^m \times \Gamma^\ell$ *ersetzen: Ist* $X \subseteq K^n \times \mathrm{RV}^m \times \Gamma^\ell$ *so wende die ursprüngliche Version des Satzes an auf* $X' := \{(\underline{a}, \underline{\xi}, \underline{\zeta}) \in K^n \times \mathrm{RV}^{m+\ell} \mid (\underline{a}, \underline{\xi}, v_{\mathrm{RV}}(\zeta_1), \dots, v_{\mathrm{RV}}(\zeta_\ell)) \in X\}$*.*

Bemerkung 3.2.12 *Der Satz gilt auch uniform in den Parametern und uniform in allen Modellen von* $\mathrm{HEN}_{0,0}$*, d. h. die Formel, die* f *definiert, hängt nur von der Formel, die* X *definiert, ab.*

Lemma 3.2.13 *Ist* $C \subseteq K$ *endlich und A-definierbar, so existiert eine A-definierbare Abbildung* $f\colon K \to \mathrm{RV}^N$*, so dass für* $b, b' \in K$ *gilt:* $b \sim_C b'$ *genau dann, wenn* $f(b) = f(b')$*.*

Bemerkung 3.2.14 *Das Lemma gilt auch uniform in den Parametern und uniform in allen Modellen von* $\mathrm{HEN}_{0,0}$*.*

´

Lemma 3.2.15 *Es gilt auch die Umkehrung von Lemma 3.2.4: Ist* $A \subseteq K$*, so haben zwei Elemente* $b, b' \in K$ *den gleichen Typ über* $A \cup \mathrm{RV}$ *genau dann, wenn* $b \sim_{\mathrm{acl}_{\mathrm{VF}} A} b'$ *gilt.*

Konvention 3.2.16 *Ist* $\Gamma \equiv \mathbb{Z}$*, so fassen wir* $\mathbb{Z}$ *als Untergruppe von* Γ *auf (wobei* $1 \in \mathbb{Z}$ *das kleinste positive Element von* Γ *ist).*

Definition 3.2.17 *Ist* K *ein beliebiger bewerteter Körper und* $\lambda \in \Gamma$ *mit* $\lambda \geq 0$*, so setzen wir* $\mathrm{RV}_\lambda^\times := K^\times / B_{>\lambda}(1)$ *und* $\mathrm{RV}_\lambda := \mathrm{RV}_\lambda^\times \cup \{0\}$ *und schreiben* $\mathrm{rv}_\lambda\colon K \to \mathrm{RV}_\lambda$ *für die kanonische Abbildung. Für* $a \in K$ *nennt man* $\mathrm{rv}_\lambda(a)$ *einen* ***höheren Leitterm*** *von* a*, und* RV_λ *ist eine* ***höhere Leittermstruktur****.*

Bemerkung 3.2.18 *Analog zu Bemerkungen 2.1.3 und 2.1.5 gilt:*

(a) $B_{>\lambda}(1)$ *ist eine Untergruppe von* $K^{\times}$.

(b) *Für* $a, b \in K$ *gilt* $\mathrm{rv}_\lambda(a) = \mathrm{rv}_\lambda(b)$ *genau dann, wenn* $v(a-b) > v(a) + \lambda$ *ist oder* $a = b = 0$.

Notation 3.2.19 *Ist* K *ein bewerteter Körper mit Wertegruppe* $\Gamma \equiv \mathbb{Z}$, *so schreiben wir* $\mathrm{RV}_\bullet$ *für die disjunkte Vereinigung* $\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathrm{RV}_\ell$ *der Sorten* RV_ℓ. *Wenn wir von einer definierbaren Menge* $X \subseteq \mathrm{RV}_\bullet^m$ *sprechen, ist implizit gemeint:* $X \subseteq \mathrm{RV}_{\ell_1} \times \cdots \times \mathrm{RV}_{\ell_m}$, *für gewisse* $\ell_i \in \mathbb{N}$.

Satz 3.2.20 *Sei* K *ein henselscher bewerteter Körper der Charakteristik* $(0, p)$ *für* p *prim und mit Wertegruppe* $\Gamma \equiv \mathbb{Z}$. *Wir nehmen außerdem an, dass* $v(p) \in \mathbb{N} \subseteq \Gamma$ *liegt. sei* $A \subseteq K \cup \mathrm{RV}_\bullet$ *und sei* $X \subseteq K^n \times \mathrm{RV}_\bullet^m$ A*-definierbar. Dann existiert eine* A*-definierbare Abbildung* $f\colon K^n \to \mathrm{RV}_\bullet^k$, *deren nicht-leere Fasern krumme Quader sind, und so dass für* $\underline{b}, \underline{b}' \in K^n$ *gilt: Ist* $f(\underline{b}) = f(\underline{b}')$ *so ist* $X_{\underline{b}} = X_{\underline{b}'}$.

Bemerkung 3.2.21 *Für hinreichend große* p *gilt Satz 3.2.9 auch direkt in Körpern der Charakteristik* $(0, p)$ *(und auch in Körpern der Charakteristik* (p, p)*); die Schranke an* p *hängt hier von der Formel ab, die die Menge* $X \subseteq K^n \times \mathrm{RV}^m$ *definiert.*

3.3 Messen in $\mathbb{Q}_p$

Satz 3.3.1 *Auf jeder lokal kompakten topologischen Gruppe* G *mit abzählbarer Umgebungsbasis existiert ein bis auf Skalierung eindeutiges Borel-Maß* μ *mit folgenden Eigenschaften:*

- μ *ist links-invariant.*
- μ *ist nicht-trivial (also nicht überall* 0*).*
- *Jede kompakte Menge hat ein endliches Maß.*

Definition 3.3.2 *Das Maß aus Satz 3.3.1 heißt* ***Haar-Maß***.

Satz 3.3.3 $\mathbb{Z}_p$ *ist kompakt. Insbesondere ist* $(\mathbb{Q}_p, +)$ *eine lokal-kompakte topologische Gruppe.*

Konvention 3.3.4 *Von nun an sei* μ *das Haar-Maß auf* $(\mathbb{Q}_p, +)$, *das so normiert ist, dass* $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$ *ist. Das Produktmaß auf* $\mathbb{Q}_p^n$ *bezeichnen wir auch mit* μ.

Lemma 3.3.5 *Das Haar-Maß eines Balls* $B_{>\lambda}(a) = B_{\geq\lambda+1}(a) \subseteq \mathbb{Q}_p$ *ist* $p^{-\lambda-1}$.

Satz 3.3.6 *Wir fassen* $\mathbb{Q}_p$ *als* L*-Struktur auf in einer* RV*-Erweiterung* $L \supseteq L_{\mathrm{RV}}$. *Dann ist jede definierbare Menge* $X \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ *Borel-messbar. Genauer: Ist* $f\colon \mathbb{Q}_p^n \to$

$\mathrm{RV}_\bullet^N$ *wie in Satz 3.2.20, so gilt:* $\mu(X) = \sum_{\underline{\xi} \in f(X)} p^{-g(\underline{\xi})-n}$*, wobei* $g(\underline{\xi}) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ *die Summe der Radien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *des krummen Quaders* $f^{-1}(\underline{\xi})$ *ist.*

Bemerkung 3.3.7 *Die Funktion* g *aus Satz 3.3.6 ist definierbar.*

3.4 Presburger-Mengen

In diesem Abschnitt arbeiten wir in der Sprache L_{Pres}:

Definition 3.4.1 *Die* ***Sprache von Presburger*** *ist* $L_{\mathrm{Pres}} = L_{\mathrm{oag}} \cup \{1\} \cup \{\equiv_\ell \mid \ell \geq 1\}$*, wobei* $\equiv_\ell$ *eine binäre Relation ist, die in* $\mathbb{Z}$ *interpretiert wird als:* $a \equiv_\ell b \iff a \equiv b \mod \ell$.

Bemerkung 3.4.2 L_{Pres}*-Terme in* $\underline{x}$ *haben die Form* $c + \sum_i r_i x_i$*, für* $c, r_i \in \mathbb{Z}$.

Satz 3.4.3 *In der Sprache* L_{Pres} *hat* $\mathbb{Z}$ *Quantorenelimination.*

Lemma 3.4.4 *Jede quantorenfreie* L_{Pres}*-Formel* $\phi(\underline{x}, y)$ *ist äquivalent zu einer Disjunktion von Formeln der Form*

$$\phi_i(\underline{x}, y) = \psi_i(\underline{x}) \ \wedge\ t_i(\underline{x}) \leq r_i y \leq t_i'(\underline{x}) \ \wedge\ y \equiv_{\ell_i} c_i$$

wobei die $\psi_i(\underline{x})$ *quantorenfreie* L_{Pres}*-Formeln sind,* $t_i(\underline{x})$ *und* $t_i'(\underline{x})$ L_{Pres}*-Terme oder* $-\infty$ *bzw.* $+\infty$ *und für natürliche Zahlen* $0 \leq c_i < \ell_i$ *und* $r_i \geq 1$*. Außerdem kann erreicht werden, dass die* ϕ_i *paarweise inkonsistent sind.*

Korollar 3.4.5 (Presbuger-Zellzerlegung) *Jede* L_{Pres}*-definierbare Teilmenge von* $\mathbb{Z}^n$ *ist eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen, die durch Formeln definiert werden, die wie die* ϕ_i *in Lemma 3.4.4 aussehen.*

Satz 3.4.6 (Rektilinearisierung) *Jede definierbare Teilmenge von* $\mathbb{Z}^n$ *lässt sich als disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen der Form* $f_i(\mathbb{N}^k)$ *schreiben, wobei* $f_i \colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^n$ *eine injektive Abbildung ist, deren Koordinaten durch* L_{Pres}*-Terme gegeben sind.*

Definition 3.4.7 *Sei* $X \subseteq \mathbb{N}^n$ *eine beliebige Teilmenge. Die* ***Poincaré-Reihe*** *zu* X *ist die formale Potenzreihe* $P_X(Z_1, \ldots, Z_n) := \sum_{\underline{r} \in X} \underline{Z}^{\underline{r}} \in \mathbb{Z}[[Z_1, \ldots, Z_n]]$*. Hierbei verwenden wir Multiindex-Notation:* $\underline{Z}^{\underline{r}} = Z_1^{r_1} \cdots Z_n^{r_n}$

Satz 3.4.8 *Ist* $X \subseteq \mathbb{N}^n$ L_{Pres}*-definierbar, so ist die Poincaré-Reihe* P_X *eine rationale Funktion; genauer:* $P_X = g(\underline{Z})/h(\underline{Z})$ *für Polynome* $g, h \in \mathbb{Z}[\underline{Z}]$*, wobei* h *ein Produkt von Polynomen der Form* $1 - \underline{Z}^{\underline{a}}$ *ist, für Tupel* $\underline{a} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$.

3.5 Rationalität von L_{DP}-Poincaré-Reihen

Definition 3.5.1 *Sei $X \subseteq \mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Z}^m$ so, dass für jedes $\underline{r} \in \mathbb{N}^m$ das Maß $\mu(X_{\underline{r}})$ endlich ist. Dann definieren wir die zugehörige **Poincaré-Reihe** als*

$$P_X(\underline{Z}) := \sum_{\underline{r} \in \mathbb{N}^m} \mu(X_{\underline{r}}) \underline{Z}^{\underline{r}}.$$

Beispiel 3.5.2 *Die Poincaré-Reihe aus Definition 1.8.6 ist im Wesentlichen ein Spezialfall davon: Ist $\underline{f} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^\ell$ gegeben, so setze $X_r := \{\underline{a} \in \mathbb{Q}_p^n \mid v(f_1(\underline{a})) > r, \ldots, v(f_\ell(\underline{a})) > r\}$. Dann ist*

$$\mu(X_r) = \#V_{\underline{f}}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \cdot \mu((p^r\mathbb{Z}_p)^n)$$

und damit

$$P_{\underline{f},p}(Z) = P_X(p^n Z).$$

Satz 3.5.3 *Sei $\phi(\underline{x}, \underline{\lambda})$ eine L_{DP}-Formel, wobei $\underline{x}$ ein n-Tupel von VF-Variablen ist und $\underline{\lambda}$ ein m-Tupel von VG-Variablen. Wir nehmen an, dass für jede Primzahl p und jedes $\underline{r} \in \mathbb{N}^m$ das Maß $\mu(\phi(\mathbb{Q}_p, \underline{r}))$ endlich ist. Dann existiert ein $M > 0$, ein Polynom $h \in \mathbb{Z}[\underline{Z}, P]$ und endlich viele Ringformeln $\psi_{\underline{\ell}}$, $\psi'_{\underline{\ell}}$ ($\underline{\ell} \in I \subseteq \mathbb{N}^m$), so dass für jede Primzahl $p \geq M$ gilt:*

$$P_{\phi(\mathbb{Q}_p)}(\underline{Z}) = \frac{\sum_{\underline{\ell} \in I} (\#\psi_{\underline{\ell}}(\mathbb{F}_p) - \#\psi'_{\underline{\ell}}(\mathbb{F}_p)) \underline{Z}^{\underline{\ell}}}{h(\underline{Z}, p)}.$$

Lemma 3.5.4 *Ist $P \in \mathbb{Q}[[\underline{Y}, \underline{Z}]]$ eine rationale Funktion und ist $\underline{a} \in \mathbb{C}^n$ so, dass P absolut konvergiert, wenn man $\underline{a}$ für $\underline{Y}$ einsetzt (so dass man $P(\underline{a}, \underline{Z}) \in \mathbb{Q}[[\underline{Z}]]$ erhält), so ist auch $P(\underline{a}, \underline{Z})$ eine rationale Funktion.*