Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

WS 2005/06
7.11.2005
Blatt 3

Übungen zu
Mathematische Optimierung I

9. Seien $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

   Zeigen Sie:

   (a) (1P) $K + L$, αK sind konvex.

   (b) (1P) $(\alpha + \beta)K \subseteq \alpha K + \beta K$. Gibt es Beispiele, bei denen echte Inklusion auftritt?

   (c) (2P) $(\alpha + \beta)K = \alpha K + \beta K$, wenn $\alpha\beta \geq 0$.

   (d) (1P) $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen impliziert $x + \alpha O$ offen für $\alpha \neq 0$.

   (e) (1P) $\mathring{K}$ konvex.

   (f) (1P) Die konvexe Hülle einer Menge S ist die kleinste konvexe Obermenge von S.

10. (2P) Seien $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $i = 1, ..., m$ differenzierbar, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $M = \{x \in K : g_i(x) \leq 0\,,\, i = 1, ..., m\}$.
    Sei $x^* \in M$ und $A(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\,,\, i = 1, ..., m\}$ die sogenannte aktive Indexmenge für x^*. Nehmen Sie nun an, daß es kein $d \in \mathbb{R}^n$ gibt, das

$$d^T \nabla f(x^*) < 0,$$

$$d^T \nabla g_i(x^*) \leq 0 \qquad \forall i \in A(x^*) \text{ und}$$

$$x^* + d \in K$$

    erfüllt. Zeigen Sie, daß x^* eine lokale Lösung von $\min\limits_{x \in M} f(x)$ ist, falls f und g_i für $i \in A(x^*)$ konvex sind.

Abgabe: Mo., 14.11.2005, 14.00 Uhr