....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 1

Abgabe am 11.4.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Bestimmen Sie $\operatorname{dcl}(\emptyset)$ in $\mathbb{Q}$ als Struktur in der Sprache $L = \{0, +, -, <\}$.

Anmerkung: Wenn Sie wollen, können Sie erst zeigen, dass $\mathbb{Q}$ in dieser Sprache Quantoren-Elimination hat. Schneller geht es aber mit Automorphismen. (Es lassen sich leicht viele Automorphismen der L-Struktur $\mathbb{Q}$ explizit angeben.)

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ L-Strukturen. In der Vorlesung haben wir gesehen (Bem. 5.1.5), dass eine 1-zu-1-Entsprechung zwischen definierbaren Mengen in $\mathcal{M}$ und M-definierbaren Mengen in $\mathcal{M}'$ existiert. Es soll gezeigt werden, dass dies falsch wird, wenn man beliebige definierbare Mengen in $\mathcal{M}'$ betrachtet. Genauer: Geben Sie (für eine Sprache und für Strukturen Ihrer Wahl) Beispiele an für:

(a) eine definierbare Menge $X' \subset M'$, so dass $X' \cap M = M$ ist aber $X' \neq M'$;

(b) eine definierbare Menge $X' \subset M'$, so dass $X' \cap M$ nicht in $\mathcal{M}$ definierbar ist.

Hinweis: Für beide Teile ist es ist z. B. möglich, $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, <)$ zu wählen.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als Struktur in der Sprache $L_{\text{oring}} = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$. Geben Sie eine Sprache L' auf $\mathbb{R}$ an, die interdefinerbar mit L_{oring} ist, die aber nur zwei Relationssymbole (und weder Konstantensymbole noch Funktionssymbole) hat.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Sei K ein Körper, V ein unendlicher K-Vektorraum, aufgefasst als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur (vgl. Bsp. 4.2.15), und sei $A \subset V$ eine Teilmenge.

Zeigen Sie: Sind $v, v' \in V \setminus \langle A \rangle_K$, so ist $\operatorname{tp}(v/A) = \operatorname{tp}(v'/A)$. (Hierbei ist $\langle A \rangle_K$ die lineare Hülle von A.)

Hinweis: Verwenden Sie, dass V Quantoren-Elimination hat.

Aufgabe 5 (1+1+2 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\{<\}$-Struktur.

(a) Zeigen Sie, dass für $a, a' \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $a \neq a'$, dann ist auch $\operatorname{tp}(a/\mathbb{Q}) \neq \operatorname{tp}(a'/\mathbb{Q})$.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen 1-Typ über $\mathbb{Q}$ an, der in $\mathbb{R}$ nicht realisiert ist.

(c) Bestimmen Sie $S_1(\mathbb{Q})$.