....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 10

Abgabe am 13.6.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

(Eine andere Variante des Satzes von Ramsey:)

Für jede natürliche Zahl m existiert eine natürliche Zahl n, so das gilt: Ist B eine n-elementige Menge und E eine zweistellige symmetrische Relation auf B, so existiert eine m-elementige Teilmenge $A \subset B$, so dass $E(a, a')$ entweder für alle Paare oder für kein Paar $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ gilt.

Hinweis: Dies lässt sich mit dem Kompaktheitssatz aus der Vorlesungsversion des Satzes von Ramsey (5.9.7) herleiten.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(Noch eine andere Variante des Satzes von Ramsey:)

Sei B eine unendliche Menge und E_3 eine dreistellige symmetrische Relation auf B. Dann existiert eine unendliche Teilmenge $A \subset B$, so dass $E_3(a, a', a'')$ entweder für alle Tripel oder für kein Tripel a, a', a'' von drei verschiedenen Elementen aus A gilt. Mit „symmetrisch“ ist hierbei gemeint: $E_3(a_1, a_2, a_3) \iff E_3(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})$ für jede Permutation $\sigma \in S_3$.

Hinweis: Wenn man ein $a_0 \in B$ wählt, erhält man eine zweistellige symmetrische Relation auf $B \setminus \{a_0\}$: $E(b, b') \iff E_3(a_0, b, b')$. Auf E können Sie die Vorlesungsversion des Satzes von Ramsey (5.9.7) anwenden...

Aufgabe 3 (2+2+1 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Graph (also eine Menge M mit einer zweistelligen symmetrischen, anti-reflexive Relation E), der zykelfrei ist (d. h. für kein $n \geq 3$ existieren $a_1, \dots, a_n \in M$ mit $E(a_1, a_2)$, $E(a_2, a_3)$, ..., $E(a_{n-1}, a_n)$ und $E(a_n, a_1)$) und so dass jede Ecke unendlich viele Nachbarn hat (d. h. für alle $a \in M$ ist die Menge $\{b \in M \mid E(a, b)\}$ unendlich).

Wir fassen M als L-Struktur auf mit $L = \{E, E_2, E_3, E_4, \dots\}$, wobei $E_n(a, a')$ gilt, wenn a und a' den Abstand n haben (d. h. wenn n das Minimum ist, so dass $a = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = a'$ existieren mit $E(a_i, a_{i+1})$ für $0 \leq i < n$).

Sie dürfen ohne Beweis annehmen:

- Die Graphen der oben beschriebenen Form sind genau alle Modelle einer vollständigen L-Theorie T.
- Diese Theorie T hat Quantoren-Elimination.

(a) Zeigen Sie: acl hat nicht die Austauscheigenschaft in $\mathcal{M}$.

(b) Zeigen Sie, dass T total transzendent ist.
Hinweis: Prüfen Sie, dass T ω-stabil ist. Das können Sie sich noch erleichtern, indem Sie Aufgabe 2 von Blatt 9 verwenden.

(c) Bestimmen Sie den Morleyrang von M (als definierbare Menge).

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als Struktur in der Sprache $L = \{0, 1, +, -\} \cup \{Z_n \mid n \geq 2\}$, wobei Z_n ein einstelliges Relationssymbol ist, das definiert ist durch: $\forall x\colon (Z_n(x) \leftrightarrow \exists y\colon n \cdot y = x)$. (Wie immer ist $n \cdot y$ eine Kurzschreibweise für $\underbrace{y + \cdots + y}_{n}$.)

Sie dürfen ohne Beweis annehmen:

- $\mathbb{Z}$ hat als L-Struktur Quantoren-Elimination.
- Die elementaren Erweiterungen von $\mathbb{Z}$ sind genau die Gruppen der Form $\mathbb{Z} \times G$, wobei G eine torsionsfreie divisible abelsche Gruppe ist (d. h. G ist als abelsche Gruppe elementar äquivalent zu $\mathbb{Q}$).
Korrektur: Diese zweite Behauptung stimmt gar nicht. Die Aufgabe lässt sich aber auch ohne lösen.

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ ist nicht total transzendent.

(b) $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ ist κ-stabil für jedes $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$.
Hinweis: Mit Aufgabe 2 von Blatt 9 können Sie sich die Arbeit erleichtern.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModAnw_S19/