....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 12

Abgabe am 27.6.2019 in der Vorlesung

1	2	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

(Nur ein halbes Blatt, wegen Feiertag.)

Aufgabe 1 (2+1 Punkte):

(a) Sei R ein Ring (kommutativ, mit 1), sei $I \subset R$ ein Ideal, und sei $J := \{g \in R \mid \exists n \geq 1\colon g^n \in I\}$ die Menge der Elemente, die eine Potenz in I haben. Zeigen Sie, dass J ein Ideal ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Ideal J aus (a) das kleinste Radikal-Ideal ist, dass I enthält.
Anmerkung: Man nennt J das „Radikal von I“ und schreibt $\sqrt{I}$ dafür.

Aufgabe 2 (1+3+1 Punkte):

Sei k ein Körper und $K \supset k$ ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper. Wir arbeiten „über k“ (d. h. algebraisch bedeutet algebraisch über k, etc.).

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine unendliche absteigende Kette von algebraischen Mengen $K^n \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \supsetneq \dots$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $k[\underline{x}]$ Noethersch ist.

(b) Zeigen Sie: Jede algebraische Menge $X \subset K^n$ lässt sich als Vereinigung von endlich vielen irreduziblen algebraischen Mengen $Y_1, \dots, Y_k$ schreiben mit $Y_i \not\subset Y_j$ für alle $i \neq j$, und diese Y_i sind durch X eindeutig festgelegt (bis auf Reihenfolge).
Hinweis: Unter Verwendung von (a) lässt sich das ähnlich beweisen wie Satz 5.8.8 über die Zerlegung von definierbaren Mengen Komponenten vom Morley-Grad 1.
Anmerkung: Die Y_i nennt man die „irreduziblen Komponenten“ von X.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine algebraische Menge an, die nicht irreduzibel ist aber Morley-Grad 1 hat.