....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 13

Abgabe am 4.7.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (1+2+1+1 Punkte):

Sei $X \subset K^n$ eine algebraische Menge. Eine (über k) „reguläre Funktion" auf X ist eine Funktion $X \to K$, die sich als Einschränkung eines Polynoms in $k[\underline{x}]$ schreiben lässt.

(a) Begründen Sie (kurz), dass der Ring der regulären Funktionen auf X isomorph zu $k[\underline{x}]/I(X)$ ist. Wir bezeichnen diesen Ring mit $\mathcal{O}_X$.

(b) Zeigen sie: $\mathcal{O}_X$ ist ein Integritätsbereich genau dann, wenn X irreduzibel ist.

(c) Wir nehmen jetzt an, dass X irreduzibel ist. Sei außerdem $\underline{a} \in X$ ein generischer Punkt von X. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathcal{O}_X \to K, f \mapsto f(\underline{a})$ injektiv ist.

(d) Sei X weiterhin irreduzibel. Zeigen Sie: Der Rang von X ist gleich dem „Transzendenzgrad von $\mathcal{O}_X$ über k", d. h. gleich $\dim_k \operatorname{acl}_{L_{\mathrm{ring}}(k)}(\mathcal{O}_X)$ im Sinne von Definition 5.3.15, wobei wir $\mathcal{O}_X$ mit Hilfe von (c) als Teilmenge von K auffassen.

Anmerkung: In der algebraischen Geometrie verwendet man oft (d) als Definition vom Rang von X (wobei das dann Dimension von X genannt wird).

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

Sei $X \subset K^n$ eine irreduzible algebraische Menge. Zeigen Sie:

(a) Ist $\operatorname{rk} X \geq 1$, so existiert eine algebraische Teilmenge $Y \subset X$ mit $\operatorname{rk} Y = \operatorname{rk} X - 1$. Hinweis: Y lässt sich z. B. wie folgt konstruieren: Finden Sie eine Koordinatenprojektion $\pi\colon K^n \to K$ so dass $\operatorname{rk}(\pi(X)) = 1$ ist (z. B. mit Hilfe von Lemma 5.7.4). Finden Sie dann ein $a \in K$ so dass $Y := \pi^{-1}(a)$ den gewünschten Rang hat (z. B. mit Hilfe von Satz 5.7.3).

(b) Der Rang von X ist gleich dem größten $d \in \mathbb{N}$, so dass eine Kette von irreduziblen algebraischen Mengen $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d = X$ existiert.

Hinweis: Satz 5.10.15 ist für diese Aufgabe nützlich.

Anmerkung: Auch (b) wird in der algebraischen Geometrie manchmal als Definition der Dimension von X verwendet.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei $X \subset K^n$ algebraisch. Zeigen Sie: $I(X)$ ist ein maximales Ideal in $k[\underline{x}]$ genau dann, wenn X irreduzibel ist und Rang 0 hat.

Hinweis: Aufgabe 2 (a) kann nützlich sein.

Aufgabe 4 (2+1 Punkte):

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{F}_3^{\mathrm{alg}}$ eine Nullstelle von $X^3 - X - 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{F}_3^{\mathrm{alg}}, (a,b,c) \mapsto a + \alpha b + \alpha^2 c$ ein $\mathbb{F}_3$-Vektorraum-Isomorphismus ist, dessen Bild $\mathbb{F}_{27}$ ist. (Sie können sich einfach auf Sätze aus der Algebra berufen, so dass Sie kaum etwas selbst beweisen müssen.)

(b) Mit einer Abbildung f wie in (a) lässt sich die Multiplikation in $\mathbb{F}_3^3$ explizit berechnen. Machen Sie das für das folgende Beispiel: Finden Sie $(a,b,c) \in \mathbb{F}_3^3$, so dass $f((a,b,c)) = f((1,1,0)) \cdot f((2,0,2))$.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Sei $q = p^r$ eine Primpotenz und sei $f = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$.

Zeigen Sie: Ist $g \in \mathbb{F}_p[x]$ ein irreduzibler Faktor von f, so ist $\deg g$ ein Teiler von r.

Hinweis: Betrachten Sie den Oberkörper $\mathbb{F}_p(\alpha)$ von $\mathbb{F}_p$, der durch Adjunktion einer Nullstelle $\alpha \in \mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}$ von f aus $\mathbb{F}_p$ entsteht. (Zur Erinnerung: $\mathbb{F}_p(\alpha)$ ist der kleinste Unterkörper von $\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}$, der α enthält.) Vergleichen Sie $\mathbb{F}_p(\alpha)$ mit $\mathbb{F}_q$ und wenden Sie einen Satz aus der Algebra an über Grade von Körpererweiterungen.