Name		Anwendungen der Modelltheorie Blatt 2 Abgabe am 18.4.2019 in der Vorlesung	1	2	3	4	5	Σ
Matr-Nr.	Gruppe							

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, $A \subset M$ und $n \in \mathbb{N}$; im Folgenden ist $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Zur Erinnerung: $S_n(A)$ ist die Menge aller n-Typen über A; hierbei werden äquivalente Typen miteinander identifiziert.

Sind $\Sigma(\underline{x}), \Sigma'(\underline{x})$ partielle n-Typen, so schreiben wir $\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$, wenn $\Sigma(\underline{x}) \models \phi(\underline{x})$ für alle $\phi(\underline{x}) \in \Sigma'(\underline{x})$

Wir nennen eine Teilmenge von $S_n(A)$ offen, wenn sie die Form $\{p(\underline{x}) \in S_n(A) \mid p(\underline{x}) \not\models \Sigma\}$ ist, für einen partiellen n-Typen $\Sigma(\underline{x})$ über A. Analog zu Blatt 11, Aufgabe 3 vom letzten Semester kann man zeigen, dass $S_n(A)$ mit dieser Definition ein kompakter topologischer Raum wird. (Das brauchen Sie nicht nochmal zu zeigen.)

Zeigen Sie:

(a) Jede abgeschlossene Teilmenge von $S_n(A)$ lässt sich schreiben als Schnitt von (möglicherweise unendlich vielen) Mengen der Form $\{p(\underline{x}) \in S_n(A) \mid p(\underline{x}) \models \phi(\underline{x})\}$ für $L(A)$-Formeln ϕ.

(b) $S_n(A)$ ist „völlig unzusammenhängend“, d. h. zu je zwei verschiedenen $p(\underline{x}), p'(\underline{x}) \in S_n(A)$ existiert eine Menge $X \subset S_n(A)$, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist und so dass $p(\underline{x}) \in X$ und $p'(\underline{x}) \notin X$ ist.

(c) Ein Typ $p(\underline{x}) \in S_n(A)$ heißt isoliert, wenn p zu einer einzelnen $L(A)$-Formel $\phi(\underline{x})$ äquivalent ist, also wenn $p(\underline{x}) \models \phi(\underline{x})$ und $\phi(\underline{x}) \models p(\underline{x})$ gilt. Zeigen Sie, dass $p(\underline{x})$ in diesem Sinne isoliert ist genau dann, wenn $p(\underline{x})$ im topologischen Sinne isoliert ist, d. h. wenn die Menge $\{p(\underline{x})\}$ offen ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei L eine Sprache, die nur Konstantensymbole enthält und sei $\mathcal{M}$ eine beliebige L-Struktur. Zeigen Sie, das acl die Austauscheigenschaft besitzt und geben Sie eine Basis von $\mathcal{M}$ an.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Wir arbeiten in einer Struktur $\mathcal{M}$, in der acl die Austauscheigenschaft besitzt. Seien $a_1, \ldots, a_n \in M$ so, dass $a_i \notin \operatorname{acl}(\{a_1, \ldots, a_{i-1}\})$ für alle i. Zeigen Sie, dass dann $a_1, \ldots, a_n$ schon algebraisch unabhängig sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $L = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir machen $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu einer L-Struktur $\mathcal{M}$, indem wir definieren: $f^{\mathcal{M}}((m, n)) := (m, 0)$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{dcl}(\{a\})$ für $a = (m, n) \in M$.

(b) Zeigen Sie, dass acl in $\mathcal{M}$ nicht die Austauscheigenschaft besitzt.

Hinweis: Wenn Sie zeigen wollen, dass gewisse Mengen nicht definierbar sind, ist es nützlich, Automorphismen von $\mathcal{M}$ zu betrachten.

Aufgabe 5 (1+2+2 Punkte):

(a) Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur mit der folgenden Eigenschaft: Für jede *endliche* Teilmenge $A \subset M$ und alle $b, c \in M$ gilt: Ist $c \in \operatorname{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \operatorname{acl}(A)$, so ist $b \in \operatorname{acl}(A \cup \{c\})$. Zeigen Sie, dass acl dann schon die Austauscheigenschaft besitzt (d. h. dass die Eigenschaft auch für unendliche A gilt).

(b) Sei T eine vollständige Theorie und sei $\mathcal{M}$ ein $\aleph_0$-saturiertes Modell von T, dass die Austauscheigenschaft besitzt. Zeigen Sie, dass dann jedes Modell von T die Austauscheigenschaft besitzt.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Bedingung „$\aleph_0$-saturiert“ wirklich nötig ist.
Hinweis: Sei $\mathcal{M}$ eine beliebige L-Struktur. Was können Sie über die Austauscheigenschaft sagen, wenn wir $\mathcal{M}$ als $L(M)$-Struktur betrachten?