Name ....

Matr-Nr. .... Gruppe ....

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 4

Abgabe am 2.5.2019 in der Vorlesung

1	2	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+1+3+2+1+1 Punkte):

Sei K ein Körper.

Ein affiner Raum über K ist, anschaulich ausgedrückt, ein „K-Vektorraum, bei dem man vergessen hat, welches der Nullvektor ist". Formal definieren wir, dass ein affiner Raum ein K-Vektorraum V ist, aufgefasst als Struktur in der Sprache $L_{K\text{-AFF}} = \{f\} \cup \{g_r \mid r \in K\}$, wobei:

- f ist ein drei-stelliges Funktionssymbol, mit $f^V(v_0, v_1, v_2) = v_1 + v_2 - v_0$.
- Jedes g_r ist ein zwei-stelliges Funktionsymbol, mit $g_r^V(v_0, v_1) = v_0 + r \cdot (v_1 - v_0)$.

(a) Zeigen Sie: Eine $L_{K\text{-AFF}}$-Struktur V ist ein affiner Raum über K genau dann, wenn für jedes $u \in V$ gilt: V wird zu einem K-Vektorraum, mit $v_1 + v_2 := f(u, v_1, v_2)$ und $r \cdot v_1 := g_r(u, v_1)$.
(Sie brauchen nicht alles im Detail nachzurechnen.)

(b) Folgern Sie, dass eine $L_{K\text{-AFF}}$-Theorie existiert, deren Modelle genau die affinen Räume über K sind.

Für den Rest der Aufgabe dürfen Sie annehmen, dass die Theorie INFAFF_K der unendlichen affinen Räume über K vollständig ist und Quantoren-Elminiation hat.

Außerdem nehmen wir für den Rest der Aufgabe an, dass V ein Modell von INFAFF_K ist.

(c) Die *affine Hülle* $\langle A \rangle_{\text{aff}}$ einer Teilmenge $A \subset V$ ist definiert als die Menge der (endlichen) Summen der Form $\sum_{i=1}^n r_i a_i$ für beliebige $a_i \in A$ und für $r_i \in K$, die $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ erfüllen.
Zeigen Sie: Für $A \subset V$ gilt: $\text{acl}(A) = \text{dcl}(A) = \langle A \rangle_{\text{aff}}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass atomare Formeln äquivalent sind zu Formeln der Form $\sum_{i=1}^n r_i x_i = 0$, für $r_i \in K$, die $\sum_{i=1}^n r_i = 0$ erfüllen.

(d) Zeigen Sie, dass V streng minimal ist.

(e) Wenn V als Vektorraum n-dimensional ist, was ist dann die Dimension von V als affiner Raum im Sinne der modelltheoretischen Definition?
Anmerkung: Das ist möglicherweise nicht das, was man sich wünschen würde.

(f) Bestimmen Sie die kleinste Dimension, die ein Modell von INFAFF_K haben kann.
Anmerkung: Dies hängt (ein bisschen) von der Kardinalität von K ab.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine o-minimale Struktur.

(a) Ist $X \subset M$ definierbar, so existieren nach Definition von o-Minimalität $-\infty =: a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n := +\infty$, so dass für jedes i das Intervall (a_{i-1}, a_i) entweder vollständig in X oder vollständig im Komplement $M \setminus X$ liegt.
Zeigen Sie: Ist X A-definierbar, so können diese $a_1, \ldots, a_{n-1}$ bereits in $\text{dcl}(A)$ gewählt werden.

(b) Sei $f\colon M \to M$ eine definierbare Funktion und sei $a \in M$. Zeigen Sie, dass der linksseitige Grenzwert $\lim_{b \to a-} f(b)$ existiert (und analog dann natürlich auch der rechtsseitige).
Anmerkung: Sie dürfen den Monotoniesatz verwenden.

(c) Sei $f\colon M \to M$ eine definierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{b \to +\infty} f(x)$ in $M \cup \{\pm\infty\}$ existiert.