1	2	Σ

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 5

Abgabe am 9.5.2019 in der Vorlesung

....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

(Kürzeres Blatt wegen Feiertag.)

Aufgabe 1 (2+2+3 Punkte):

Wir arbeiten in einer Sprache L, die $L_{\text{ord}} = \{<\}$ enthält. In dieser Aufgabe wollen wir ein Kriterium für o-Minimalität mit Hilfe von 1-Typen finden.

(a) Sei $\mathcal{M}$ o-minimal, und sei $A \subset M$ eine „nach unten abgeschlossene Teilmenge", d. h. für alle $a, a' \in M$ gelte: Falls $a' \in A$ und $a < a'$, dann auch $a \in A$. ($A = \emptyset$ und $A = M$ sind auch erlaubt.)
Zeigen Sie: $\Sigma(x) := \{a < x \mid a \in A\} \cup \{x < a \mid a \in M \setminus A\}$ ist ein vollständiger Typ über M.

(b) Sei weiterhin $\mathcal{M}$ o-minimal. Zeigen Sie: Jeder vollständige Typ über M ist entweder in M realisiert oder hat die Form wie in (a) (für eine nach unten abgeschlossene Menge $A \subset M$).

(c) Zeigen Sie, dass auch die folgende Rückrichtung von (b) gilt: Sei $\mathcal{M}$ eine L-Stuktur, die als L_{ord}-Struktur ein Modell von DLO ist. Wir nehmen an, dass jeder vollständige Typ über M ist entweder in M realisiert oder hat die Form wie in (a). Dann ist $\mathcal{M}$ o-minimal.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\phi(x)$ eine $L(M)$-Formel ist, die der o-Minimalität widerspricht und zeigen Sie, dass die Menge $\Sigma(x, x') := \{\phi(x), \neg\phi(x')\} \cup \{a_1 < x < a_2 \wedge a_1 < x' < a_2 \mid a_1, a_2 \in M, a_1 < a_2\}$ ein partieller Typ ist. Benutzen Sie dann eine Realisierung (b, b') davon, um einen Widerspruch zu (a) zu erhalten.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte):

Sei L eine Sprache, die $L_0 := \{<, 0, +, -\}$ enthält. Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, die o-minimal ist und die als L_0-Struktur elementar äquivalent zu $\mathbb{Q}$ ist.

(a) Sei $\phi(x, \underline{y})$ eine L-Formel, und sei $\psi(\underline{y}) = \exists x\colon \phi(x, \underline{y})$. Zeigen Sie, dass eine $\emptyset$-definierbare Funktion $f\colon \psi(\mathcal{M}) \to M$ existiert, so dass für alle $\underline{b} \in \psi(\mathcal{M})$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(f(\underline{b}), \underline{b})$.
(Sie müssen also irgendwie auf definierbare Weite einen Punkt aus $\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ auswählen. Sie werden wohl Fallunterscheidungen danach benötigen, ob $\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ ein Minimum enthält, oder ein offenes Intervall oder so.)

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{dcl}(\emptyset)$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{M}$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie (a) und den Tarski-Test.

Korrektur: Damit die Aufgabe stimmt, hätte noch gegeben sein müssen, dass $\operatorname{dcl}(\emptyset)$ nicht nur $\{0\}$ ist.