....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 6

Abgabe am 16.5.2019 in der Vorlesung

1	2	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Sie dürfen auf diesem Aufgabenblatt Satz 5.7.3 schon verwenden.

Aufgabe 1 (2+2+2+1+2+1+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ o-minimal und sei $X \subset M^2$ eine definierbare Menge. Für $a \in M$ setzen wir $X_a := \{b \in M \mid (a,b) \in X\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $Y_0 := \{a \in M \mid X_a \text{ ist endlich}\}$ ist definierbar.
Hinweis: Verwende die Struktur von definierbaren Teilmengen von M.

(b) Ist $\operatorname{rk} X = 1$, so ist $M \setminus Y_0$ endlich.

(c) Ist $\operatorname{rk} X = 1$, so lässt sich X als endliche Vereinigung schreiben von Mengen der folgenden Formen:
- Graphen von stetigen definierbaren Funktionen $f\colon Z \to M$, für definierbare $Z \subset M$;
- Mengen der Form $\{a\} \times Z$, für $a \in M$ und $Z \subset M$ definierbar.

Hinweis: Zerlegen Sie X mit Hilfe von Y_0.

(d) Der topologische Abschluss $\bar{X}$ von X ist auch definierbar.
(Als Topologie betrachten wir die Produkttopologie, die von der Intervalltopologie auf M kommt, d. h. eine Basis der Topologie ist gegeben durch Produkte von offenen Intervallen $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$.)

(e) Ist $\operatorname{rk} X = 1$, so ist $\operatorname{rk} \bar{X} = 1$ und $\operatorname{rk}(\bar{X} \setminus X) = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie (c).

(f) Ist $f\colon M^2 \to M$ eine definierbare Funktion, und ist Z die Menge der $(a,b) \in M^2$, so dass die Funktion $y \mapsto f(a,y)$ unstetig bei b ist, so ist $\operatorname{rk} Z \leq 1$.

(g) Ist $f\colon M^2 \to M$ eine definierbare Funktion, so hat die Menge der Unstetigkeitsstellen von f Rang höchstens 1.
Sie dürfen ohne weitere Begründung verwenden: Wenn für alle (a', b') in einer ganzen Umgebung eines Punktes (a,b) die Funktion $y \mapsto f(a', y)$ stetig bei b' und die Funktion $x \mapsto f(x, b')$ stetig bei a' ist, so ist auch f stetig bei (a,b).
Korrektur: Die Behauptung, die hier ohne Begründung verwendet werden darf, stimmt gar nicht. (Wie peinlich! ;-))

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte):

Sei T die Theorie von $\mathbb{Z}$ in der Sprache $L = \{<, s\}$, wobei s die Nachfolgerfunktion ist. Sie dürfen in dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden:

- T hat Quantorenelimination.
- Die Modelle von T sind genau die Strukturen der Form $M = Q \times \mathbb{Z}$, wobei Q eine angeordnete Menge ist, die Anordnung auf M die lexikographische Ordnung ist (d. h. $(q,n) < (q',n') \iff q < q' \vee (q = q' \wedge n < n')$) und $s(q,n) = (q, n+1)$.

(a) Zeigen Sie, dass acl in allen Modellen von T die Austauscheigenschaft besitzt.
Hinweis: Für $A \subset M$ lässt sich $\operatorname{acl}(A)$ leicht explizit angeben.

(b) Bestimmen Sie die Dimension eines Modells $M = Q \times \mathbb{Z}$ in Abhängigkeit von Q.

(c) Bestimmen Sie den Rang von $\{(x,y) \in M^2 \mid a < x < y < b\}$ in Abhängigkeit von $a, b \in M$.