1	2	3	4	Σ

....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 7

Abgabe am 23.5.2019 in der Vorlesung

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+2+3 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur, sei $X \subset M^n$ eine unendliche definierbare Menge, und sei $f\colon X^2 \to X$ injektive definierbare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass eine elementar äquivalente Struktur $M' \equiv M$ existiert, in der acl nicht die Austauscheigenschaft hat.
Hinweis: Kann $\mathrm{rk}(X)$ wohldefiniert sein?

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{MR}(X) = \infty$.
Hinweis: Zeigen Sie induktiv $\mathrm{MR}(X) \geq \beta$ für alle Ordinalzahlen β.

(c) Sei nun $M = \mathbb{F}_p(t)$, d. h. der Körper der rationalen Funktionen mit Koeffizienten im endlichen Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Wir fassen M als L_{ring}-Struktur auf. Geben Sie eine injektive definierbare Abbildung $M^2 \to M$ an.
Hinweis 1: Zeigen Sie, dass für jedes $a \in M$ die p-te Potenz a^p im Unterkörper $\mathbb{F}_p(t^p)$ liegt; erinnern Sie sich dazu daran, dass in Körper der Charakteristik p die Formel $(a + b)^p = a^p + b^p$ gilt.
Hinweis 2: Erinnern Sie sich außerdem, dass nach der Algebra-Vorlesung für beliebige Körper L und beliebige Unterkörper $K \subset L$ gilt: L ist ein K-Vektorraum. (Falls $\dim_K L \geq 2$ ist, findet man eine injektive Abbildung $K^2 \to L$.)

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Wir betrachten nochmal die Struktur $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von Blatt 2, Aufgabe 4: $L = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist, und $f^{\mathcal{M}}((m, n)) := (m, 0)$. (Zur Erinnerung: acl hat nicht die Austauscheigenschaft, d. h. wir können nicht den acl-Rang von definierbaren Mengen definieren.)

Bestimmen Sie den Morley-Rang von M.

Hinweis: Überprüfen Sie zunächst (kurz), dass M bereits $\aleph_0$-saturiert ist.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Sei $L = \{\sim\}$, und sei T die Theorie, die besagt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen ist und dass jede Äquivalenzklasse unendlich ist. (Diese Theorie T ist vollständig; das brauchen Sie nicht zu zeigen.)

(a) Zeigen Sie, dass acl in jedem Modell von T die Austauscheigenschaft hat.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{MR}(M)$ (für ein beliebiges Modell $\mathcal{M} \models T$). Gilt $\mathrm{MR}(M) = \mathrm{rk}(M)$?

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Geben Sie ein Beispiel für eine Struktur M an, so dass $\mathrm{MR}(M) = \omega$ ist.