....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Anwendungen der Modelltheorie
Blatt 8

Abgabe am 29.5.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Achtung: Abgabe schon am Mittwoch!

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei X eine definierbare Menge, sei $\beta \in \mathrm{On}$ und seien $X_i \subset X$ (für $i \in \mathbb{N}$) definierbare Teilmengen mit $\mathrm{MR}(X_i) = \beta$ und mit der Eigenschaft, dass jedes $a \in X$ in höchstens zwei der Mengen X_i liegt.

(a) Zeigen Sie, dass nur endlich viele i existieren, so dass $\mathrm{MR}(X_i \setminus X_1) < \beta$ ist.
Hinweis: Was lässt sich über $\mathrm{MR}(X_i \cap X_1)$ sagen?

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{MR}(X) \geq \beta + 1$ ist, indem Sie unendlich viele disjunkte definierbare Mengen $Y_i \subset X$ finden mit $\mathrm{MR}(Y_i) = \beta$ für alle i.
Hinweis: Fangen Sie mit $Y_1 := X_1$ an, wenden Sie (a) an, um ein geeignetes Y_2 zu finden, und wiederholen Sie den Prozess.

Aufgabe 2 (1+2 Punkte):

Seien X und Y definierbare Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung mit endlichen Fasern (d. h. für jedes $y \in Y$ ist das Urbild $f^{-1}(y)$ endlich).

Korrektur: f sollte definierbar sein.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{MR}(X) \geq \mathrm{MR}(Y)$

(b) Zeigen Sie $\mathrm{MR}(X) \leq \mathrm{MR}(Y)$ unter der zusätzlichen Annahme, dass $|f^{-1}(y)| \leq 2$ ist für alle $y \in Y$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1.

Anmerkung: Die Zusatzannahme ist nicht nötig (wenn man in einem hinreichend saturierten Modell arbeitet); ohne wird der Beweis nur komplizierter.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Seien $\underline{b}, \underline{b}' \in M^m$ mit $\mathrm{tp}(\underline{b}/\emptyset) = \mathrm{tp}(\underline{b}'/\emptyset)$ und sei $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ eine L-Formel. Zeigen Sie, dass $\phi(M, \underline{b})$ und $\phi(M, \underline{b}')$ den selben Morleyrang haben.
Hinweis: Zeigen Sie per Induktion über $\beta \in \mathrm{On}$, dass für alle $\underline{b}, \underline{b}', \phi$ wie oben gilt: $\mathrm{MR}(\phi(M, \underline{b})) \geq \beta \iff \mathrm{MR}(\phi(M, \underline{b}')) \geq \beta$.

(b) Folgern Sie: Für jede Sprache L existiert eine Ordinalzahl α, so dass für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ und für jede L-definierbare Menge $X \subset M^n$ gilt: Wenn $\mathrm{MR}(X) < \infty$ ist, dann ist schon $\mathrm{MR}(X) \leq \alpha$.
Hinweis: Wenn es eine Menge vom Morleyrang β gibt, dann gibt es auch Mengen von jedem kleineren Morleyrang. Verwenden Sie (a), um zu beschränken, wie viele verschiedene Morleyränge es überhaupt geben kann.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte):

Sei $\alpha \in \mathrm{On}$ und $A \subset M$ Wir nennen (nur in dieser Aufgabe) eine definierbare Menge $X \subset M^n$ „α-minimal über A", wenn $\mathrm{MR}(X) = \alpha$ ist und für jede A-definierbare Teilmenge $Y \subset X$ gilt: $\mathrm{MR}(Y) < \alpha$ oder $\mathrm{MR}(X \setminus Y) < \alpha$. (Der Unterschied zu α-streng-minimal ist, dass Y mit Parametern aus A definierbar sein soll.)

(a) Jede A-definierbare Menge X mit $\mathrm{MR}(X) = \alpha$ lässt sich als disjunkte Vereinigung von endlich vielen A-definierbaren Mengen, die α-minimal über A sind, schreiben.

(b) Ist X α-minimal über A, so ist die Menge $\Sigma(\underline{x}) := \{\phi(\underline{x}) \mid \mathrm{MR}(\phi(M) \cap X) = \alpha\}$ ein vollständiger Typ über A. Wir nennen diesen Typ den generischen Typ von X.

(c) Ist p ein Typ über A, der eine Formel ϕ enthält mit $\mathrm{MR}(\phi) < \infty$, so ist p der generische Typ einer (geeigneten) A-definierbaren Menge X.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModAnw_S19/