

Modelltheorie – Kurzschrift

Inhaltsverzeichnis

Einführung in die Logik/Modelltheorie	2
1 Logik erster Stufe	2
1.1 Sprachen und Strukturen	2
1.2 Formeln und Aussagen	3
1.3 Theorien	5
2 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz	6
2.1 Aussagenlogik	6
2.2 Der Hilbert-Kalkül	7
2.3 Der Vollständigkeitssatz	7
3 Mengenlehre	8
3.1 Die ZFC-Axiome	8
3.2 Die natürlichen Zahlen	10
3.3 \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} und der ganze Rest	11
3.4 Der erste gödelsche Unvollständigkeitssatz	13
3.5 Der zweite gödelsche Unvollständigkeitssatz	13
3.6 Ordinalzahlen	14
3.7 Kardinalzahlen	15
3.8 Universen	16
4 Modelltheorie	16
4.1 Elementare Erweiterungen	16
4.2 Quantorenelimination	17
4.3 Algebraisch abgeschlossene Körper	19
4.4 Reell abgeschlossene Körper	20
Anwendungen der Modelltheorie in der Geometrie	22
5 Dimension und Rang	22
5.1 Definierbare Objekte	22
5.2 Typen und Saturiertheit	23
5.3 Dimension von Strukturen	24
5.4 Elementare Abbildungen	25
5.5 Streng minimale Strukturen	26
5.6 O-minimale Strukturen	26
5.7 Der acl-Rang von definierbaren Mengen	27
5.8 Der Morley-Rang von definierbaren Mengen	28
5.9 Total transzendente Theorien	30
5.10 Algebraisch abgeschlossene Körper	31
5.11 Pseudo-endliche Körper	33

Einführung in die Logik/Modelltheorie

1 Logik erster Stufe

1.1 Sprachen und Strukturen

Definition 1.1.1 Eine **Sprache** (oder **Signatur**) L besteht aus folgendem:

- einer Menge, die man die **Konstantensymbole** von L nennt;
- einer Menge, die man die **Funktionssymbole** von L nennt;
- einer Menge, die man die **Relationssymbole** von L nennt;
- einer Funktion von der Menge der Funktionssymbole nach $\mathbb{N}_{\geq 1}$ und einer Funktion von der Menge der Relationssymbole nach $\mathbb{N}_{\geq 1}$; man nennt dies die **Stelligkeit** des entsprechenden Funktions-/Relationssymbols.

Notation 1.1.2 Üblicherweise schreibt man L als Vereinigung der drei Mengen.

Beispiel 1.1.3 • Die leere Sprache $L_\emptyset = \emptyset$ (ohne Konstanten-, Funktions- und Relationssymbole).

- Die Sprache der Gruppen in additive Schreibweise: $L_{\text{grp}} = \{0, +, -\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol ist, $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol und $-$ ein einstelliges Funktionssymbol.
- Die Sprache der Gruppen in multiplikativer Schreibweise: $L_{\text{mgrp}} = \{1, \cdot, ^{-1}\}$, wobei 1 ein Konstantensymbol ist, \cdot ein zweistelliges Funktionssymbol und $^{-1}$ ein einstelliges Funktionssymbol.
- Die Sprache der Ringe: $L_{\text{ring}} = L_{\text{grp}} \cup \{1, \cdot\}$, wobei 1 ein Konstantensymbol ist und \cdot ein zweistelliges Funktionssymbol.
- Die Sprache der angeordneten Mengen: $L_{\text{ord}} = \{<\}$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol ist.

Definition 1.1.4 Sei L eine Sprache. Eine L -**Struktur** $\mathcal{M} = (M, \dots)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge M und:

- für jedes Konstantensymbol c aus L : ein Element $c^{\mathcal{M}}$;
- für jedes Funktionssymbol f aus L : eine Funktion $f^{\mathcal{M}}: M^\ell \rightarrow M$, wobei ℓ die Stelligkeit von f ist;
- für jedes Relationssymbol R aus L : eine Teilmenge $R^{\mathcal{M}} \subset M^\ell$, wobei ℓ die Stelligkeit von f ist.

Man nennt M die **Grundmenge** von \mathcal{M} und $c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$ und $R^{\mathcal{M}}$ nennt man die **Interpretation** von c bzw. f bzw. R in \mathcal{M} .

Beispiel 1.1.5 Jede Menge ist eine L_\emptyset -Struktur. Jede (abelsche) Gruppe G kann als L_{grp} -Struktur aufgefasst werden: $\mathcal{G} = (G, +^{\mathcal{G}}, -^{\mathcal{G}}, 0^{\mathcal{G}})$. (Aber: Nicht jede L_{grp} -Struktur ist eine Gruppe.) Analog kann jeder Ring als L_{ring} -Struktur aufgefasst werden, etc.

Notation 1.1.6 Oft identifizieren wir eine Struktur \mathcal{M} mit ihrer Grundmenge M . Außerdem schreiben wir für die Interpretationen der Symbole aus L statt $c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$ und $R^{\mathcal{M}}$ meist einfach nur c , f und R .

Beispiel 1.1.7 Sei K ein Körper und sei $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r \cdot \mid r \in K\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol ist, $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol, und $-$ und $r \cdot$ (für alle $r \in K$) einstellige Funktionssymbole. Dann kann jeder K -Vektorraum V eine $L_{K\text{-VR}}$ -Struktur \mathcal{V} aufgefasst werden, wobei $r \cdot^{\mathcal{V}}: V \rightarrow V$ die Skalarmultiplikation mit r ist.

Notation 1.1.8 Für Tupel verwenden wir die Notation $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Ist $\alpha: M \rightarrow N$ eine Abbildung und $\underline{a} \in M^n$, so schreiben wir $\alpha(\underline{a})$ für das Tupel $(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \in N^n$.

Definition 1.1.9 Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{M} = (M, \dots)$ und $\mathcal{N} = (N, \dots)$ L -Strukturen.

- (a) Eine **(L-)Homomorphismus** von \mathcal{M} in \mathcal{N} ist eine Abbildung $\alpha: M \rightarrow N$, so dass gilt:
 - (i) Für jedes Konstantensymbol $c \in L$ gilt: $\alpha(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$
 - (ii) Für jedes n -stellige Funktionssymbol $f \in L$ und alle $\underline{a} \in M^n$ gilt: $\alpha(f^{\mathcal{M}}(\underline{a})) = f^{\mathcal{N}}(\alpha(\underline{a}))$
 - (iii) Für jedes n -stellige Relationssymbol $R \in L$ und alle $\underline{a} \in M^n$ gilt: $\underline{a} \in R^{\mathcal{M}} \Rightarrow \alpha(\underline{a}) \in R^{\mathcal{N}}$
- (b) Ist α injektiv und gilt in (c) sogar $\underline{a} \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \alpha(\underline{a}) \in R^{\mathcal{N}}$, so nennt man α eine **(L-)Einbettung** von \mathcal{M} in \mathcal{N} .
- (c) Eine bijektive Einbettung $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ nennt man auch **(L-)Isomorphismus** (und man nennt \mathcal{M} und \mathcal{N} **isomorph**, wenn ein solches α existiert).
- (d) Ist $M \subset N$ und ist die Abbildung $M \rightarrow N, m \mapsto m$ Einbettung von \mathcal{M} in \mathcal{N} , so nennt man \mathcal{M} auch eine **Unterstruktur** von \mathcal{N} und \mathcal{N} eine **Oberstruktur** oder **Erweiterung** von \mathcal{M} . Notation dafür: $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

Beispiel 1.1.10 Fasst man Gruppen als L_{mgrp} -Strukturen auf, so entspricht Definition 1.1.9 den üblichen Begriffen: Ein Gruppenhomomorphismus das selbe wie ein L_{mgrp} -Homomorphismus, ein Gruppenisomorphismus ist das selbe wie ein L_{mgrp} -Isomorphismus, und eine Untergruppe ist das selbe wie eine L_{mgrp} -Unterstruktur.

Analoges gilt für Ringe oder Körper in der Sprache L_{ring} und für K -Vektorräume in der Sprache $L_{K\text{-VR}}$ aus Beispiel 1.1.7.

1.2 Formeln und Aussagen

Im folgenden sei L immer eine Sprache.

Definition 1.2.1 Sei $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Tupel von Variablen.

- (a) Ein „**L-Term** in \underline{x} “ ist wie folgt definiert:
 - (i) Jede Variable x_i ist ein L -Term in \underline{x} .
 - (ii) Ist $c \in L$ ein Konstantensymbol, so ist c auch ein L -Term in \underline{x} .
 - (iii) Sind t_1, \dots, t_ℓ L -Terme in \underline{x} und ist f ein ℓ -stelliges Funktionssymbol von L , so ist $f(t_1, \dots, t_\ell)$ ein L -Term in \underline{x} .
- (b) Eine „**L-Formel** (erster Stufe) in \underline{x} “ ist wie folgt definiert:
 - (i) Sind t_1 und t_2 L -Terme in \underline{x} , so ist $t_1 \doteq t_2$ eine L -Formel in \underline{x} .
 - (ii) Sind t_1, \dots, t_ℓ L -Terme in \underline{x} und ist R ein ℓ -stelliges Relationssymbol von L , so ist $R(t_1, \dots, t_\ell)$ eine L -Formel in \underline{x} .
 - (iii) Ist ψ eine L -Formel in \underline{x} , so ist auch $\neg\psi$ eine L -Formel in \underline{x} .

- (iv) Sind ψ_1 und ψ_2 L-Formeln in \underline{x} , so ist auch $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ eine L-Formel in \underline{x} .
- (v) Ist ψ eine L-Formel in x_1, \dots, x_{n+1} , so ist $\exists x_{n+1}: \psi$ eine L-Formel in x_1, \dots, x_n .

Genauer: Etwas ist ein L-Term bzw. eine L-Formel wenn es sich in endlich vielen Schritten der Form (i)–(iii) bzw. (i)–(v) konstruieren lässt.

- (c) Ist ϕ eine L-Formel in \underline{x} , so sagt man auch, x_1, \dots, x_n sind die **freien Variablen** von ϕ .
- (d) Eine Formel ohne freie Variablen (also im Fall $n = 0$) nennt man auch eine L-**Aussage** (erster Stufe).

Notation 1.2.2 Ist t ein L-Term in \underline{x} , so schreibt man oft auch $t(\underline{x})$ dafür; analog schreibt man $\phi(\underline{x})$, wenn ϕ eine L-Formel in \underline{x} ist.

Definition 1.2.3 Sei \mathcal{M} eine L-Struktur, \underline{x} ein n -Tupel von Variablen und $\underline{a} \in M^n$.

- (a) Ist $t(\underline{x})$ ein L-Term, so definiert man $t(\underline{a}) \in M$ wie folgt:
 - (i) Falls $t = x_i$:
 $t(\underline{a}) = a_i$
 - (ii) Falls $t = c$ (für ein Konstantensymbol $c \in L$):
 $t(\underline{a}) = c^{\mathcal{M}}$
 - (iii) Falls $t = f(t_1, \dots, t_\ell)$ (für ein ℓ -stelliges Funktionssymbol f):
 $t(\underline{a}) = f^{\mathcal{M}}(t_1(\underline{a}), \dots, t_\ell(\underline{a}))$
- (b) Ist $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel, so definiert man folgendermaßen, ob $\phi(\underline{a})$ **wahr** (in \mathcal{M}) ist; man sagt auch „ $\phi(\underline{a})$ **gilt** (in \mathcal{M})“ oder „ \underline{a} **erfüllt** ϕ “. Als Notation für $\phi(\underline{a})$ **wahr** in \mathcal{M} verwendet man „ $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ “.
 - (i) Falls $\phi(\underline{x}) = t_1(\underline{x}) \doteq t_2(\underline{x})$:
 $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $t_1(\underline{a}) = t_2(\underline{a})$ ist.
 - (ii) Falls $\phi(\underline{x}) = R(t_1(\underline{x}), \dots, t_\ell(\underline{x}))$:
 $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $(t_1(\underline{a}), \dots, t_\ell(\underline{a})) \in R^{\mathcal{M}}$ ist.
 - (iii) Falls $\phi(\underline{x}) = \neg\psi(\underline{x})$:
 $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \not\models \psi(\underline{a})$ (d. h. wenn $\psi(\underline{a})$ nicht wahr in \mathcal{M} ist).
 - (iv) Falls $\phi(\underline{x}) = \psi_1(\underline{x}) \wedge \psi_2(\underline{x})$:
 $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn sowohl $\mathcal{M} \models \psi_1(\underline{a})$ als auch $\mathcal{M} \models \psi_2(\underline{a})$.
 - (v) Falls $\phi(\underline{x}) = \exists y: \psi(\underline{x}, y)$:
 $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn es ein $b \in M$ gibt, so dass $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$.
- (c) Ist ϕ eine Aussage, so schreibt man „ $\mathcal{M} \models \phi$ “ falls ϕ wahr in \mathcal{M} ist.

Beispiel 1.2.4 Ist ϕ die \wedge -Verknüpfung aller Gruppenaxiome, ausgedrückt in der Sprache L_{mgrp} , so gilt für L_{mgrp} -Strukturen \mathcal{M} : \mathcal{M} ist eine Gruppe genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \phi$.

Analoges gilt für abelsche Gruppen, Ringe, Körper, angeordnete Mengen, etc.

Notation 1.2.5 Bei Formeln verwenden wir oft abkürzende oder intuitive Notationen, z. B.:

- $\psi_1 \vee \psi_2$ bedeutet $\neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$
- $\forall y: \psi(\underline{x}, y)$ bedeutet $\neg\exists y: \neg\psi(\underline{x}, y)$
- $t_1 \not\doteq t_2$ bedeutet $\neg t_1 \doteq t_2$.
- $\exists y_1, y_2: \dots$ bedeutet $\exists y_1: \exists y_2: \dots$

- Funktionssymbole, die Verknüpfungen darstellen, werden „wie üblich“ geschrieben, also z. B. „ $a + b$ “ statt $+(a, b)$.
- Klammern werden nach Bedarf verwendet (z. B. $(a + b) \cdot c$ für $\cdot(+ (a, b), c)$)
- $\phi \rightarrow \psi$ bedeutet $\neg\phi \vee \psi$.
- $\phi \leftrightarrow \psi$ bedeutet $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$
- \top steht für eine Aussage, die immer wahr ist, z. B. für $\forall x: x = x$.
- \perp steht für eine Aussage, die nie wahr ist, z. B. für $\neg\top$.
- Wenn eine Sprache 1 und $+$ enthält, schreiben wir 2 statt $1 + 1$, 3 statt $1 + 1 + 1$, etc.
- Wenn eine Sprache \cdot enthält, schreiben wir x^2 statt $x \cdot x$, x^3 statt $x \cdot x \cdot x$, etc.
- Sind ϕ_1, \dots, ϕ_n L -Formeln, so setzen wir

$$\bigvee_{i=1}^n \phi_i := \phi_1 \vee \dots \vee \phi_n$$

und

$$\bigwedge_{i=1}^n \phi_i := \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n.$$

(Im Fall $n = 0$ setzen wir $\bigvee_{i=1}^0 \phi_i = \perp$ und $\bigwedge_{i=1}^0 \phi_i = \top$.)

Lemma 1.2.6 Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\phi(\underline{x}, y)$ eine L -Formel, so gibt es eine L -Formeln in \underline{x} , die folgendes ausdrücken:

- Es gibt mindestens n verschiedene y , so dass $\phi(\underline{x}, y)$ gilt.
- Es gibt höchstens n verschiedene y , so dass $\phi(\underline{x}, y)$ gilt.
- Es gibt genau n verschiedene y , so dass $\phi(\underline{x}, y)$ gilt.

Notation 1.2.7 Für die Formeln aus dem vorigen Lemma schreiben wir $\exists^{\geq n} y: \phi(\underline{x}, y)$, $\exists^{\leq n} y: \phi(\underline{x}, y)$ und $\exists^=n y: \phi(\underline{x}, y)$.

1.3 Theorien

Definition 1.3.1 (a) Eine L -**Theorie** ist eine (beliebige) Menge von L -Aussagen.

- Eine L -Struktur \mathcal{M} nennt man **Modell** einer L -Theorie T , wenn für $\phi \in T$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi$. Notation dafür: $\mathcal{M} \models T$.

Beispiel 1.3.2 Es gibt eine L_{mgrp} -Theorie, deren Modelle genau die Gruppen sind; diese Theorie nennt man die „**Theorie der Gruppen**“. Analog definiert man die **Theorie der abelschen Gruppen, der Ringe, der Körper, der algebraisch abgeschlossenen Körper, der Vektorräume, etc.**

Definition 1.3.3 (a) Eine L -Theorie T heißt **konsistent**, wenn sie ein Modell besitzt (d. h. wenn es eine L -Struktur \mathcal{M} gibt mit $\mathcal{M} \models T$); sonst heißt T **inkonsistent**.

- Zwei L -Theorien T_1 und T_2 heißen **äquivalent** (Notation: $T_1 \equiv T_2$), wenn sie die gleichen Modelle besitzen (d. h. wenn für jede L -Struktur \mathcal{M} gilt: $\mathcal{M} \models T_1$ gdw. $\mathcal{M} \models T_2$).
- Eine L -Aussage ϕ **folgt** aus einer L -Theorie T (Notation dafür: $T \models \phi$), wenn ϕ in jedem Modell von T wahr ist (d. h. wenn für jede L -Struktur \mathcal{M} mit $\mathcal{M} \models T$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi$).

Lemma 1.3.4 Für eine L -Theorie T sind äquivalent:

- (a) T ist inkonsistent.
- (b) Für alle L -Aussagen ϕ gilt $T \models \phi$.
- (c) $T \models \perp$.
- (d) Es gibt eine L -Aussage ϕ mit $T \models \phi$ und $T \models \neg\phi$.

Definition 1.3.5 Eine L -Theorie T heißt **vollständig**, wenn für jede L -Aussage ϕ entweder $T \models \phi$ oder $T \models \neg\phi$ gilt (aber nicht beides).

Definition 1.3.6 Ist \mathcal{M} eine L -Struktur, so ist die **Theorie von \mathcal{M}** die Menge aller L -Aussagen, die in \mathcal{M} wahr sind:

$$\text{Th}(\mathcal{M}) := \{\phi \text{ } L\text{-Aussage} \mid \mathcal{M} \models \phi\}.$$

Definition 1.3.7 Zwei L -Strukturen \mathcal{M} und \mathcal{N} heißen **elementar äquivalent** (Notation dafür: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$), wenn $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$ gilt.

Lemma 1.3.8 Für eine L -Theorie T sind äquivalent:

- (a) T ist vollständig.
- (b) T ist konsistent, und alle Modelle von T sind elementar äquivalent.
- (c) Es gibt eine L -Struktur \mathcal{M} , so dass T äquivalent zu $\text{Th}(\mathcal{M})$ ist.

Definition 1.3.9 Sei T eine L -Theorie. Zwei L -Formeln $\phi_1(\underline{x})$ und $\phi_2(\underline{x})$ heißen **äquivalent modulo T** , wenn gilt: $T \models \forall \underline{x}: (\phi_1(\underline{x}) \leftrightarrow \phi_2(\underline{x}))$. Im Fall $T = \emptyset$ sagt man einfach nur „ $\phi_1(\underline{x})$ und $\phi_2(\underline{x})$ sind **äquivalent**“.

2 Der Gödelsche Vollständigkeitsatz

Wenn nicht anders angegeben sei im folgenden L immer eine (beliebige) Sprache.

Definition 2.0.1 Eine L -Aussage ϕ heißt **Tautologie**, wenn sie in allen L -Strukturen gilt (d. h. wenn ϕ äquivalent zu \top ist).

2.1 Aussagenlogik

Definition 2.1.1 Sei $\underline{P} = (P_1, \dots, P_m)$ ein Tupel von Variablen.

- (a) Eine aussagenlogische Formel Φ in \underline{P} ist wie folgt definiert:
 - (i) \top ist eine aussagenlogische Formel.
 - (ii) Jedes P_i ist eine aussagenlogische Formel.
 - (iii) Sind Ψ und Ψ' aussagenlogische Formeln, so sind auch $\neg\Psi$ und $\Psi \wedge \Psi'$ aussagenlogische Formeln.
- (b) Ist Φ eine aussagenlogische Formel in \underline{P} und sind $\phi_1(\underline{x}), \dots, \phi_m(\underline{x})$ L -Formeln, so bezeichnet $\Phi[\phi_1, \dots, \phi_m](\underline{x})$ die L -Formel, die man erhält, indem man in Φ jedes P_i durch ϕ_i ersetzt.

Bemerkung 2.1.2 Sind in Definition 2.1.1 (b) $\phi_1, \dots, \phi_m \in \{\top, \perp\}$, so ist $\Phi[\phi_1, \dots, \phi_m]$ äquivalent zu \top oder zu \perp .

Definition 2.1.3 Eine **aussagenlogische Tautologie** ist eine aussagenlogische Formel Φ in $\underline{P} = (P_1, \dots, P_m)$ mit der folgenden Eigenschaft: Für beliebige $\phi_1, \dots, \phi_m \in \{\top, \perp\}$ ist $\Phi[\phi_1, \dots, \phi_m]$ äquivalent zu \top .

Lemma 2.1.4 Sei Φ eine aussagenlogische Tautologie in $\underline{P} = (P_1, \dots, P_m)$ und seien $\psi_1(\underline{x}), \dots, \psi_m(\underline{x})$ L -Formeln. Dann ist $\forall \underline{x}: \Phi[\psi_1, \dots, \psi_m]$ eine Tautologie.

2.2 Der Hilbert-Kalkül

Lemma 2.2.1 Die folgenden Aussagen („**Gleichheitsaxiome**“) sind Tautologien:

- (g1) $\forall x: x \doteq x$
- (g2) $\forall x, y: (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$
- (g3) $\forall x, y, z: (x \doteq y \wedge y \doteq z \rightarrow x \doteq z)$
- (g4) $\forall \underline{x}, \underline{y}: (\bigwedge_i x_i \doteq y_i \rightarrow (R(\underline{x}) \leftrightarrow R(\underline{y})))$
wobei \underline{x} und \underline{y} n -Tupel sind und R ein n -stelliges Relationssymbol ist.
- (g5) $\forall \underline{x}, \underline{y}: (\bigwedge_i x_i \doteq y_i \rightarrow f(\underline{x}) \doteq f(\underline{y}))$
wobei \underline{x} und \underline{y} n -Tupel sind und f ein n -stelliges Funktionssymbol ist.

Lemma 2.2.2 Die folgenden Aussagen („**Quantorenaxiome**“) sind Tautologien; hierbei sind ϕ und ψ L -Formeln und t ein L -Term; für \underline{x} ist auch das leere Tupel erlaubt.

- (q0) $\exists x: \top$
- (q1) $\forall \underline{x}: (\forall y: (\phi(\underline{x}) \rightarrow \psi(\underline{x}, y)) \leftrightarrow (\phi(\underline{x}) \rightarrow \forall y: \psi(\underline{x}, y)))$
- (q2) $\forall \underline{x}: (\forall y: \phi(\underline{x}, y) \rightarrow \phi(\underline{x}, t(\underline{x})))$

Lemma 2.2.3 (Modus Ponens) Ist T eine L -Theorie und sind $\phi(\underline{x}), \psi(\underline{x})$ L -Aussagen mit $T \models \forall \underline{x}: \phi(\underline{x})$ und $T \models \forall \underline{x}: (\phi(\underline{x}) \rightarrow \psi(\underline{x}))$, so gilt $T \models \forall \underline{x}: \psi(\underline{x})$.

Definition 2.2.4 Sei T eine L -Theorie und ϕ eine L -Aussage. Ein **formaler Beweis** von ϕ aus T ist eine (endliche) Folge (ϕ_1, \dots, ϕ_n) von L -Aussagen mit $\phi = \phi_n$, so dass für jedes $i \leq n$ gilt:

- (a) ϕ_i ist eine der Tautologien aus Lemma 2.1.4, 2.2.1 oder 2.2.2, oder
- (b) $\phi_i \in T$, oder
- (c) „ ϕ_i folgt per modus ponens aus früheren Aussagen des Beweises“, d. h. es gibt $j, k < i$ und Formeln $\psi_1(\underline{x})$ und $\psi_2(\underline{x})$ so dass gilt: $\phi_j = \forall \underline{x}: \psi_1(\underline{x})$, $\phi_k = \forall \underline{x}: (\psi_1(\underline{x}) \rightarrow \psi_2(\underline{x}))$ und $\phi_i = \forall \underline{x}: \psi_2(\underline{x})$.

Wir schreiben $T \vdash_L \phi$ wenn es einen formalen Beweis von ϕ aus T gibt.

Bemerkung 2.2.5 Es gibt viele verschiedene Definitionen von formalen Beweisen. Definition 2.2.4 ist eine Variante des **Hilbertkalküls**.

2.3 Der Vollständigkeitssatz

Satz 2.3.1 (Gödelscher Vollständigkeitssatz) $T \vdash_L \phi \iff T \models \phi$.

Definition 2.3.2 Wir nennen eine L -Theorie T **formal konsistent** wenn $T \not\vdash_L \perp$.

Lemma 2.3.3 Ist T eine L -Theorie und ϕ eine L -Aussage, so gilt $T \vdash_L \phi$ genau dann, wenn $T \cup \{\neg\phi\}$ formal inkonsistent ist.

Satz 2.3.4 (Gödelscher Vollständigkeitssatz, Version 2) Eine Theorie T ist konsistent genau dann, wenn sie formal konsistent ist.

Lemma 2.3.5 Sei T eine L -Theorie, so dass jede endliche Teilmenge $T_0 \subset T$ formal konsistent ist. Dann ist auch T formal konsistent.

Lemma 2.3.6 Ist T_i ($i \in I$) eine Kette von formal konsistenten L -Theorien, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} T_i$ formal konsistent.

Lemma 2.3.7 Sei T eine L -Theorie, $\phi(\underline{x})$ eine L -Formel ($x = (x_1, \dots, x_n)$), $L' = L \cup C$, wobei C eine Menge von Konstanten ist und $c_1, \dots, c_n \in C$. Dann gilt $T \vdash_{L'} \phi(\underline{c})$ genau dann wenn $T \vdash_L \forall \underline{x}: \phi(\underline{x})$. Insbesondere gilt für L -Aussagen: $T \vdash_{L'} \phi$ gdw $T \vdash_L \phi$.

Definition 2.3.8 Sei L eine Sprache und sei C die Menge der Konstantensymbole von L . Eine L -Theorie heißt **Henkin-Theorie**, wenn es für jede L -Formel $\phi(x)$ (in einer freien Variablen x) ein $c \in C$ gibt mit: $T \vdash_L (\exists x: \phi(x)) \rightarrow \phi(c)$.

Lemma 2.3.9 Zu jeder formal konsistenten L -Theorie T gibt es eine Sprache $L' = L \cup \{C\}$, wobei C eine Menge von Konstantensymbolen ist, und eine formal konsistente L' -Theorie T' , die eine Henkin-Theorie ist und T enthält.

Definition 2.3.10 Eine L -Theorie T heißt **formal vollständig**, wenn für alle L -Aussagen ϕ entweder $T \vdash_L \phi$ oder $T \vdash_L \neg\phi$ gilt (aber nicht beides).

Lemma 2.3.11 Jede formal konsistente L -Theorie ist in einer formal vollständigen L -Theorie enthalten.

Lemma 2.3.12 Sei T eine L -Theorie und C die Menge der Konstanten von L . Dann wird durch

$$c \sim c' \iff T \vdash c \doteq c'$$

eine Äquivalenzrelation auf C definiert. Außerdem gilt:

- (a) Ist R ein Relationssymbol von L und ist $c_i \sim c'_i$, so gilt $T \vdash R(\underline{c})$ gdw $T \vdash R(\underline{c}')$.
- (b) Ist R ein Funktionssymbol von L und ist $c_i \sim c'_i$, so gilt $T \vdash f(\underline{c}) \doteq f(\underline{c}')$.

3 Mengenlehre

3.1 Die ZFC-Axiome

Definition 3.1.1 Die **Sprache der Mengenlehre** ist $L_{\text{Me}} := \{\in\}$, wobei \in ein zweistelliges Relationssymbol ist. (Notation: $x \notin y$ heißt $\neg x \in y$.)

Notation 3.1.2 Wir verwenden übliche abkürzende Notationen, z. B.:

- $x \notin y$ heißt $\neg x \in y$
- $x \subset y$ heißt: $\forall z: (z \in x \rightarrow z \in y)$
- $\forall z \in x: \phi(z)$ heißt: $\forall z: (z \in x \rightarrow \phi(z))$
- $\exists z \in x: \phi(z)$ heißt: $\exists z: (z \in x \wedge \phi(z))$

Definition 3.1.3 Die **naive Mengenlehre** ist die L_{Me} -Theorie bestehend aus den folgenden beiden Axiomen (Extension und Komprehension).

Axiom 3.1.4 (Extension) $\forall x, x': (\forall z: (z \in x \leftrightarrow z \in x') \rightarrow x \doteq x')$

Bemerkung 3.1.5 Ist \mathcal{M} eine L_{Me} -Struktur, die das Extensionsaxiom erfüllt, so können wir Elemente von \mathcal{M} mit den entsprechenden Teilmengen von \mathcal{M} identifizieren. Die Elemente von \mathcal{M} (bzw. die damit identifizierten Teilmengen von \mathcal{M}) nennen wir **Mengen**. Beliebige Teilmengen von \mathcal{M} (die nicht notwendigerweise Elementen von \mathcal{M} entsprechen) nennen wir **Klassen**.

Axiom 3.1.6 (Komprehension) Für jede L_{Me} -Formel $\phi(x)$:
 $\exists y: \forall z: (z \in y \leftrightarrow \phi(z))$

(Genauer gesagt handelt es sich bei der Komprehension um eine unendliche Menge von Axiomen.)

Satz 3.1.7 (Russelsches Paradox) Die naive Mengenlehre ist (formal) inkonsistent.

Definition 3.1.8 ZFC (die Theorie der Mengenlehre) ist die L_{Me} -Theorie bestehend aus dem obigen Extensions-Axiom und allen folgenden Axiomen (Aussonderung, Potenzmenge, Ersetzung, Vereinigung, Auswahl, Unendlichkeit, Fundierung).

Axiom 3.1.9 (Aussonderung) Für jede L_{Me} -Formel $\phi(z, \underline{w})$:
 $\forall \underline{w}, x: \exists y: \forall z: (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \phi(z, \underline{w})))$

Notation 3.1.10 Die Menge y aus dem Aussonderungsaxiom ist nach dem Extensionsaxiom eindeutig; wir werden abkürzend $\{z \in x \mid \phi(z, \underline{w})\}$ dafür schreiben. Auch für andere Mengen, deren Existenz aus diesem oder den folgenden Axiomen folgt, verwenden wir die übliche Notation.

Bemerkung 3.1.11 Insbesondere existiert die Schnittmenge $x \cap x' = \{z \in x \mid z \in x'\}$, die Differenzmenge $x \setminus x' = \{z \in x \mid z \notin x'\}$, die leere Menge $\emptyset = \{z \in x \mid \perp\}$, und, für nicht-leere Mengen x , der Schnitt $\bigcap_{z \in x} z$.

Axiom 3.1.12 (Potenzmenge) $\forall x: \exists y: \forall z: (z \in y \leftrightarrow z \subset x)$

Notation: $y = \mathcal{P}(x)$.

Axiom 3.1.13 (Ersetzung) Für jede L_{Me} -Formel $\phi(u, z, \underline{w})$:
 $\forall \underline{w}, x: (\forall u \exists^1 z: \phi(u, z, \underline{w}) \rightarrow \exists y: \forall z: (z \in y \leftrightarrow \exists u: (u \in x \wedge \phi(u, z, \underline{w}))))$

Notation: $y = \bigcup_{u \in x} \{z \mid \phi(u, z, \underline{w})\}$.

Lemma 3.1.14 (In ZFC:) Sind x_1, \dots, x_n Mengen, so ist auch $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Menge.

Axiom 3.1.15 (Vereinigung) $\forall x: \exists y: \forall z: (z \in y \leftrightarrow \exists w: (w \in x \wedge z \in w))$

Notation: $y = \bigcup_{z \in x} z$

Lemma 3.1.16 (In ZFC:) Sind x_1, \dots, x_n Mengen, so ist auch $x_1 \cup \dots \cup x_n$ eine Menge.

Definition 3.1.17 Wenn wir alle mathematischen Objekte als Mengen definieren wollen, definieren wir das Paar (z_1, z_2) als die Menge $\{\{z_1\}, \{z_1, z_2\}\}$.

Lemma 3.1.18 (In ZFC:) Mit der obigen Definition von Paar gilt:

- (a) Sind z_1, z_2 Mengen, so ist auch (z_1, z_2) eine Menge.
- (b) Für Mengen z_1, z_2, z'_1, z'_2 gilt: $(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2)$ genau dann, wenn $z_1 = z'_1$ und $z_2 = z'_2$.

- (c) Sind x_1, x_2 Mengen, so ist auch $x_1 \times x_2 := \{(z_1, z_2) \mid z_1 \in x_1, z_2 \in x_2\}$ eine Menge.

Bemerkung 3.1.19 Danach kann man viele weitere Objekte als Mengen definieren, z. B.:

- (a) $(z_1, \dots, z_n) := (z_1, (z_2, (\dots (z_{n-1}, z_n) \dots)))$
 $x_1 \times \dots \times x_n = x_1 \times (x_2 \times (\dots (x_{n-1} \times x_n) \dots))$
- (b) Eine n -stellige Relation auf einer Menge x ist eine Teilmenge von $x^n := \underbrace{x \times \dots \times x}_n$. Die Klasse aller n -stelligen Relationen auf einer Menge x ist selbst wieder eine Menge.
- (c) Abbildungen werden mit ihrem Graph identifiziert, d. h. wir definieren eine Abbildung von x nach x' als eine Teilmenge $f \subset x \times x'$, so dass es für jedes $z \in x$ genau ein $z' \in x'$ gibt mit $(z, z') \in f$. Statt „ $(z, z') \in f$ “ verwenden wir dann aber die übliche Notation $f(z) = z'$.
Die Klasse $\text{Abb}(x, x')$ aller Abbildungen von x nach x' ist eine Menge.
- (d) Ein mit x indiziertes Tupel $(u_z)_{z \in x}$ von Elementen $u_z \in x'$ ist einfach eine Funktion von x nach x' .
Ist $(u_z)_{z \in x}$ ein Tupel von Mengen u_z , so existieren auch die Mengen $\bigcup_{z \in x} u_z$, $\bigcap_{z \in x} u_z$ und

$$\times_{z \in x} u_z = \{f \in \text{Abb}(x, \bigcup_{z \in x} u_z) \mid \forall z \in x: f(z) \in u_z\}$$

Axiom 3.1.20 (Auswahl) $\forall x: (\emptyset \notin x \rightarrow \times_{z \in x} z \neq \emptyset)$

Definition 3.1.21 Wir definieren eine natürliche Zahl n als die Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$; also: $\underline{0} := \emptyset$, $\underline{1} := \{\underline{0}\} = \{\emptyset\}$, $\underline{2} := \{\underline{0}, \underline{1}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc. Außerdem setzen wir $s(x) := x \cup \{x\}$ (d. h. falls n eine natürliche Zahl ist, ist $s(\underline{n}) = \underline{n+1}$).

Axiom 3.1.22 (Unendlichkeit) $\exists x: (\emptyset \in x \wedge \forall z \in x: z \cup \{z\} \in x)$

Bemerkung 3.1.23 Diese Menge x ist unendlich. Genauer: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich in ZFC zeigen: x hat mindestens n verschiedene Elemente.

Axiom 3.1.24 (Fundierung) $\forall x: (x \neq \emptyset \rightarrow \exists z \in x: z \cap x = \emptyset)$

Lemma 3.1.25 (In ZFC:) Es gibt keine Menge x mit $x \in x$; und es gibt keine Mengen x, y mit $x \in y$ und $y \in x$.

3.2 Die natürlichen Zahlen

Von nun an arbeiten wir immer in ZFC. Wir lassen die Punkte über $=$ und \in weg und schreiben $\underline{0}, \underline{1}, \dots$ statt $\underline{0}, \underline{1}, \dots$

Lemma 3.2.1 Sei $\phi(x) = \underline{0} \in x \wedge \forall z: (z \in x \rightarrow s(z) \in x)$. Dann gilt: Es gibt genau ein ω mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $\phi(\omega)$ gilt.
(b) Für echte Teilmengen $y \subsetneq \omega$ gilt $\phi(y)$ nicht.

Definition 3.2.2 Eine **natürliche Zahl** ist ein Element der Menge ω aus Lemma 3.2.1. (Die Menge der natürlichen Zahlen wird manchmal weiterhin mit ω bezeichnet statt mit \mathbb{N} .)

Bemerkung 3.2.3 Aus der Definition von ω folgt sofort, dass Induktionsweise über die natürlichen Zahlen funktionieren: Ist $x \subset \omega$ eine Teilmenge mit $0 \in x$ und $\forall z \in x: s(z) \in x$, so ist $x = \omega$.

Satz 3.2.4 (Rekursionssatz) (In ZFC:) Seien A und B Mengen und seien $g: A \rightarrow B$ und $h: A \times \omega \times B \rightarrow B$ Abbildungen. Dann existiert genau eine Abbildung $f: A \times \omega \rightarrow B$, so dass für alle $a \in A$ und alle $n \in \omega$ gilt: $f(a, 0) = g(a)$ und $f(a, s(n)) = h(a, n, f(a, n))$.

Definition 3.2.5 (a) Sei $+: \omega \times \omega \rightarrow \omega$ die (nach dem Rekursionssatz eindeutige) Abbildung mit:
 $a + 0 = a$ und $a + s(n) = s(a + n)$.
 (b) Wir definieren die Relation \leq auf ω durch: $m \leq n$ genau dann, wenn es ein $m' \in \omega$ gibt mit $m + m' = n$.
 (c) Sei $\cdot: \omega \times \omega \rightarrow \omega$ die (nach dem Rekursionssatz eindeutige) Abbildung mit:
 $a \cdot 0 = 0$ und $a \cdot s(n) = a \cdot n + a$.

Lemma 3.2.6 $<$, $+$ und \cdot erfüllen die üblichen Eigenschaften, z. B.:

- (a) $+$ ist assoziativ und kommutativ; 0 ist ein neutrales Element bzgl. $+$
- (b) \cdot ist assoziativ und kommutativ; 1 ist ein neutrales Element bzgl. \cdot
- (c) $+$ und \cdot erhalten die Ordnung:
 $\forall m, m', n \in \omega: (m < m' \leftrightarrow m + n < m' + n)$ und
 $\forall m, m' \in \omega: \forall n \in \omega \setminus \{0\}: (m < m' \leftrightarrow m \cdot n < m' \cdot n)$.

Bemerkung 3.2.7 Unter Verwendung unserer Definition von $s(n)$ kann man auch zeigen, dass für $n \in \omega$ gilt: $n = \{m \in \omega \mid m < n\}$.

Definition 3.2.8 Eine Menge x heißt **endlich**, wenn es ein $n \in \omega$ gibt und eine Bijektion $x \rightarrow \{m \in \omega \mid m < n\}$. Dieses n nennt man die **Kardinalität** von x ; Notation dafür: $\#x$.

Lemma 3.2.9 Die folgenden Bedingungen an eine Menge x sind äquivalent:

- (a) x ist endlich.
- (b) Jede injektive Abbildung $f \in \text{Abb}(x, x)$ ist auch surjektiv.
- (c) Jede surjektive Abbildung $f \in \text{Abb}(x, x)$ ist auch injektiv.
- (d) Es gibt keine injektive Abbildung $\omega \rightarrow x$.
- (e) Es gibt keine surjektive Abbildung $x \rightarrow \omega$

Satz 3.2.10 (Rekursionssatz, Version 2) (In ZFC:) Seien A und B Mengen und $h: A \times \mathcal{P}(A \times \omega \times B) \rightarrow B$ eine Abbildung. Dann existiert genau eine Abbildung $f: A \times \omega \rightarrow B$, so dass für alle $a \in A$ und alle $n \in \omega$ gilt:
 $f(a, n) = h(a, f|_{A \times n})$. (Hierbei fassen wir n als $\{m \in \omega \mid m < n\}$ auf und $f|_{A \times n}$ als Teilmenge von $A \times n \times B$.)

3.3 \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} und der ganze Rest

Definition 3.3.1 (a) Wir setzen $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, wobei $(m, n) \sim (m', n')$ genau dann, wenn $m + n' = m' + n$.
 (b) Für $(m, n), (m', n') \in \mathbb{Z}$ setzen wir:
 $(m, n) + (m', n') := (m + m', n + n')$
 $-(m, n) := (n, m)$
 $(m, n) \cdot (m', n') := (mm' + nn', mn' + m'n)$
 $(m, n) \leq (m', n')$ genau dann wenn $m + n' \leq m' + n$

- (c) Wir fassen \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{Z} auf, indem wir $n \in \mathbb{N}$ mit $(n, 0) \in \mathbb{Z}$ identifizieren.

Bemerkung 3.3.2 All dies ist wohldefiniert, und \mathbb{Z} ist ein Ring mit den üblichen Eigenschaften. (Z. B.: \mathbb{Z} ist angeordnet; \mathbb{Z} ist ein Hauptidealring.)

Definition 3.3.3 (a) Wir definieren \mathbb{Q} als den Quotientenkörper von \mathbb{Z} .

- (b) Sind $a, a' \in \mathbb{Z}$ und $b, b' \in \mathbb{N}$, so setzen wir $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'}$ genau dann, wenn $ab' \leq a'b$.

Definition 3.3.4 (a) Sei R der Ring der Cauchyfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Einträgen $a_n \in \mathbb{Q}$, und sei $I \subset R$ das Ideal bestehend aus den Folgen, die gegen 0 konvergieren. Wir setzen $\mathbb{R} := R/I$.

- (b) Für $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, b := (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ setzen wir $a < b$, wenn $a + I \neq b + I$ ist und für alle hinreichend großen n gilt: $a_n < b_n$.
- (c) Wir fassen \mathbb{Q} als Teilmenge von \mathbb{R} auf, indem wir jede rationale Zahl mit der entsprechenden konstanten Cauchyfolge identifizieren.

In ähnlicher Weise kann man dann auch alle anderen üblichen mathematischen Objekte definieren; z. B. kann man Sprachen als Mengen auffassen, und für jede Sprache L lassen sich L -Formeln als Mengen auffassen. Hier eine Möglichkeit, L_{Me} -Formeln als Mengen zu kodieren:

Definition 3.3.5 Der **Code** $\ulcorner \phi(\underline{x}) \urcorner$ einer L_{Me} -Formel $\phi(\underline{x})$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \ulcorner x_i \doteq x_j \urcorner &:= (0, i, j) \\ \ulcorner x_i \in x_j \urcorner &:= (1, i, j) \\ \ulcorner \neg \phi \urcorner &:= (2, \ulcorner \phi \urcorner, \emptyset) \\ \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner &:= (3, \ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner) \\ \ulcorner \forall x_i : \phi \urcorner &:= (4, i, \ulcorner \phi \urcorner) \end{aligned}$$

Ist ϕ eine L_{Me} -Aussage, so müssen wir, wenn wir in ZFC arbeiten, unterscheiden, ob wir ϕ als „inneres“ (durch eine Menge kodiertes) mathematisches Objekt auffassen (über das wir in der Sprache der Mengenlehre reden können) oder ob ϕ eine „äußere“ Aussage ist, die wir ggf. (aus ZFC) zeigen oder widerlegen wollen. Um diese Unterscheidung klarer zu machen, werden ich für äußere Aussagen und Formeln „ \mathbb{L}_{Me} -Aussage“ und „ \mathbb{L}_{Me} -Formel“ schreiben.

Bemerkung 3.3.6 All die üblichen Operationen mit Formeln lassen sich in ZFC ausdrücken, insbesondere zum Beispiel folgendes; hierbei sei L immer eine beliebige Sprache.

- (a) Die Klasse aller Codes von L -Formeln ist eine Menge.
- (b) Die Abbildung, die einer L -Struktur \mathcal{M} und einer L -Formel $\phi(\underline{x})$ in n Variablen die Menge $\{\underline{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})\}$ zuordnet, lässt sich durch eine \mathbb{L}_{Me} -Formel beschreiben.
- (c) Für L -Theorien T und L -Strukturen \mathcal{M} lässt sich „ $\mathcal{M} \models T$ “ durch eine \mathbb{L}_{Me} -Formel ausdrücken.
- (d) Für L -Theorien T und L -Aussagen ϕ lassen sich „ $\mathcal{M} \models T$ “ und „ $\mathcal{M} \vdash T$ “ durch \mathbb{L}_{Me} -Formeln ausdrücken.
- (e) Der gödelsche Vollständigkeitsatz lässt sich in ZFC beweisen: Für alle Sprachen L , für alle L -Theorien T und für alle L -Aussagen ϕ gilt: $T \models \phi \iff T \vdash \phi$.

- (f) In ZFC lässt sich beweisen: Für alle L -Theorien T und alle L_{Me} -Aussagen ϕ und ψ gilt: Wenn $T \models \phi$ und $T \models \phi \rightarrow \psi$, dann $T \models \psi$.
- (g) Die Menge der ZFC-Axiome lässt sich durch eine L_{Me} -Formel beschreiben.
- (h) Die Abbildung $\{L_{Me}\text{-Fmln in } x\} \times \{L\text{-Fmln}\} \rightarrow \{L_{Me}\text{-Aussagen}\}$, $(\phi(x), \psi(\underline{z})) \mapsto \phi(\ulcorner \psi(\underline{z}) \urcorner)$ lässt sich durch eine L_{Me} -Formel beschreiben.

3.4 Der erste gödelsche Unvollständigkeitssatz

Im Folgenden sei $T \supset \text{ZFC}$ eine Theorie, die durch eine L_{Me} -Formel $\Phi(y)$ gegeben ist, d. h. $T = \{\psi \text{ } L_{Me}\text{-Aussage} \mid \Phi(\ulcorner \psi \urcorner)\}$. Wir nehmen außerdem an, dass für alle L_{Me} -Aussagen ψ gilt: Wenn $\psi \in T$, dann $T \models \Phi(\ulcorner \psi \urcorner)$; und wenn $\psi \notin T$ dann $T \models \neg\Phi(\ulcorner \psi \urcorner)$

Satz 3.4.1 (erster gödelscher Unvollständigkeitssatz) *Sei T wie oben. Dann ist T nicht vollständig.*

Lemma 3.4.2 *Sei $\beta_T(x)$ die L_{Me} -Formel, die ausdrückt, dass x der Code einer L_{Me} -Aussage ist, die aus der von $\Phi(y)$ definierten L_{Me} -Theorie folgt. Dann gilt für alle L_{Me} -Aussagen ϕ : $T \vdash \phi \Rightarrow T \vdash \beta_T(\ulcorner \phi \urcorner)$*

Lemma 3.4.3 *Es gibt eine L_{Me} -Formel $\beta'_T(x)$, so dass für jede L_{Me} -Aussage ϕ gilt:*

- (a) Falls T konsistent ist und ϕ eine L_{Me} -Aussage mit $T \vdash \phi$ ist, dann gilt $T \vdash \beta'_T(\ulcorner \phi \urcorner)$.
- (b) $\text{ZFC} \vdash \forall \ulcorner \phi \urcorner: \neg(\beta'_T(\ulcorner \phi \urcorner) \wedge \beta'_T(\ulcorner \neg\phi \urcorner))$

3.5 Der zweite gödelsche Unvollständigkeitssatz

Seien T und $\Phi(y)$ weiterhin wie im vorigen Abschnitt.

Definition 3.5.1 *Sei CON_T die L_{Me} -Aussage, die ausdrückt, dass T (genauer: die durch $\Phi(y)$ definierte Theorie) konsistent ist.*

Satz 3.5.2 (zweiter gödelscher Unvollständigkeitssatz) *Sei T wie oben. Ist T konsistent, so gilt $T \not\models \text{CON}_T$.*

Notation 3.5.3 *Ist ϕ eine L_{Me} -Aussage, so verwenden wir $\Box\phi$ als Kurzschreibweise für die L_{Me} -Aussage, die ausdrückt: „ $T \vdash \phi$ “ (also $\Box\phi = \beta_T(\ulcorner \phi \urcorner)$, für $\beta_T(x)$ wie in Lemma 3.4.2).*

Lemma 3.5.4 *Für alle L_{Me} -Aussagen ϕ und ψ gilt:*

- (a) $T \vdash \phi \Rightarrow T \vdash \Box\phi$
- (b) $T \vdash (\Box\phi \wedge \Box(\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \Box\psi$
- (c) $T \vdash \Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$

Lemma 3.5.5 *Für L_{Me} -Aussagen ϕ , ϕ' und ψ gilt außerdem:*

- (d) $T \vdash \phi \rightarrow \psi \Rightarrow T \vdash \Box\phi \rightarrow \Box\psi$
- (e) $T \vdash (\phi \wedge \phi') \rightarrow \psi \Rightarrow T \vdash (\Box\phi \wedge \Box\phi') \rightarrow \Box\psi$.

3.6 Ordinalzahlen

Definition 3.6.1 Eine **Wohlordnung** auf einer Menge M ist eine Ordnungsrelation, so dass jede nicht-leere Teilmenge $A \subset M$ ein Minimum besitzt. Wir sagen auch, M ist (durch $<$) **wohlgeordnet**.

Bemerkung 3.6.2 (transfinite Induktion) Sei $(M, <)$ wohlgeordnet und sei A eine Teilmenge, mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in M$ gilt: Wenn alle $z < x$ in A liegen, dann liegt auch x in A .

Unter diesen Bedingungen ist $A = M$.

Bemerkung 3.6.3 Sei M wohlgeordnet (durch $<$).

- (a) Jede Teilmenge von M ist (durch $<$) wohlgeordnet.
- (b) Ist $a \in M$ nicht maximal, so besitzt a einen direkten Nachfolger.

Definition 3.6.4 Eine Menge α heißt **Ordinalzahl**, wenn gilt:

- (a) Für alle $\beta \in \alpha$ ist $\beta \subset \alpha$.
- (b) Für alle $\beta, \beta' \in \alpha$ gilt: $\beta \in \beta'$ oder $\beta' \in \beta$ oder $\beta = \beta'$.

Wir schreiben On für die Klasse aller Ordinalzahlen. Für $\alpha, \beta \in \text{On}$ definieren wir dass $\alpha < \beta$ ist, falls $\alpha \in \beta$ ist. Außerdem verwenden wir weiterhin $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$.

Bemerkung 3.6.5 $\omega \subset \text{On}$; und auch $\omega \in \text{On}$.

Bem: (a) sagt also Transitivität: $\beta < \alpha \wedge \gamma < \beta \Rightarrow \gamma < \alpha$
 Und (b) sagt, dass je zwei Elemente von α vergleichbar sind.

Lemma 3.6.6 Sei $\alpha \in \text{On}$. Dann gilt:

- (a) $s(\alpha) \in \text{On}$.
- (b) $\alpha \subset \text{On}$
- (c) $<$ ist eine Wohlordnung auf α

Definition 3.6.7 Eine Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ nennt man **Nachfolger-Ordinalzahl**, wenn $\alpha = s(\beta)$ für ein $\beta \in \text{On}$ ist; sonst nennt man α **Limes-Ordinalzahl**. (0 ist weder Nachfolger noch Limes.)

Lemma 3.6.8 (a) On ist keine Menge.

- (b) On ist (mit $<$) eine „klassengroße Wohlordnung“ in folgendem Sinn: $<$ erfüllt die Axiome einer Ordnungsrelation, und für jede \mathbb{L}_{Me} -Formel $\phi(x, \underline{w})$ und jedes Tupel \underline{b} von Mengen gilt: Ist die Klasse $\{\alpha \in \text{On} \mid \phi(\alpha, \underline{b})\}$ nicht leer, so besitzt sie ein Minimum.

Definition 3.6.9 Sei $\phi(x, y, z)$ eine \mathbb{L}_{Me} -Formel und sei \underline{w} ein Tupel von Mengen. Wir sagen, dass $\phi(x, y, \underline{w})$ ein **Funktional** F definiert, wenn es für jedes x höchstens ein y gibt mit, so dass $\phi(x, y, \underline{w})$ gilt. Wir nennen die Klasse $\{x \mid \exists y: \phi(x, y, \underline{w})\}$ den Definitionsbereich von F , und falls x im Definitionsbereich ist, schreiben $F(x)$ für das eindeutige y , so dass $\phi(x, y, \underline{w})$ gilt.

Satz 3.6.10 (Rekursionssatz für Ordinalzahlen) Sei H ein Funktional, das auf der Klasse aller Mengen definiert ist. Dann kann man ein Funktional F auf der Klasse der Ordinalzahlen angeben, so dass für jedes $\alpha \in \text{On}$ gilt:

- (a) Die Einschränkung $F|_{\alpha} = \{(\beta, F(\beta)) \mid \beta \in \alpha\}$ ist eine Menge.

(b) $F(\alpha) = H(F|_\alpha)$.

Satz 3.6.11 *Jede wohlgeordnete Menge ist zu genau einer Ordinalzahl ordnungs-isomorph. (Mit „ordnungs-isomorph“ ist gemeint: Es gibt eine ordnungserhaltende Bijektion.)*

Satz 3.6.12 (Wohlordnungssatz) *Jede Menge steht in Bijektion zu einer Ordinalzahl. Insbesondere gibt es auf jeder Menge eine Wohlordnung.*

Satz 3.6.13 (Zornsches Lemma) *Sei M eine nicht-leere Menge und \prec eine partielle Ordnung auf M (d. h. \prec ist transitiv, und für $a, a' \in M$ gilt höchstens eins von $a \prec a', a = a', a' \prec a$), so dass jede Kette eine obere Schranke in M besitzt. Dann gibt es ein maximales Element.*

3.7 Kardinalzahlen

Definition 3.7.1 *Die **Kardinalität** $|M|$ einer Menge M ist die kleinste Ordinalzahl α , so dass es eine Bijektion zwischen M und α gibt. Die Menge M heißt abzählbar, wenn $|M| = \omega$ ist. Eine **Kardinalzahl** ist eine Ordinalzahl α , für die $|\alpha| = \alpha$ gilt.*

Lemma 3.7.2 *Alle natürlichen Zahlen sind Kardinalzahlen; ω ist eine Kardinalzahl. Unendliche Nachfolger-Ordinalzahlen sind keine Kardinalzahlen.*

Satz 3.7.3 *Für Mengen M, M' gilt $|M| \leq |M'|$ genau dann, wenn eine Injektion $M \rightarrow M'$ existiert.*

Bemerkung 3.7.4 *Für Mengen M, M' gilt $|M| \leq |M'|$ genau dann, wenn eine Surjektion $M' \rightarrow M$ existiert.*

Definition 3.7.5 *Seien M, N disjunkte Mengen mit Kardinalitäten $|M| = \kappa, |N| = \mu$. Wir definieren:*

- (a) $\kappa + \mu := |M \cup N|$
- (b) $\kappa \cdot \mu := |M \times N|$
- (c) $\kappa^\mu := |\text{Abb}(N, M)|$

Satz 3.7.6 *Für jede Kardinalzahl κ gilt: $\kappa < 2^\kappa$.*

Definition 3.7.7 *Für $\alpha \in \text{On}$ definieren wir rekursiv: \aleph_α ist die kleinste unendliche Kardinalzahl, die größer ist als \aleph_β für alle $\beta < \alpha$.*

Bemerkung 3.7.8 *Für Limes-Ordinalzahlen λ gilt: $\aleph_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \aleph_\beta$.*

Satz 3.7.9 *Die **Kontinuumshypothese** „ $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ “ lässt sich in ZFC weder beweisen noch widerlegen. Auch die **verallgemeinerte Kontinuumshypothese** „ $\forall \alpha: 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{s(\alpha)}$ “ lässt sich in ZFC weder beweisen noch widerlegen.*

Satz 3.7.10 *Für unendliche Kardinalzahlen κ, μ gilt: $\kappa + \mu = \kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.*

Lemma 3.7.11 *Ist $\alpha \in \text{On}$ und sind $(M_\beta)_{\beta < \alpha}$ beliebige Mengen, so ist $|\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta| \leq \max\{\aleph_0, |\alpha|, \sup_{\beta < \alpha} |M_\beta|\}$.*

3.8 Universen

Definition 3.8.1 Ein **Grothendieck-Universum** ist eine nicht-leere Menge U mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Ist $x \in U$ und $y \in x$, so ist auch $y \in U$.
- (b) Ist $x \in U$, so ist auch $\mathcal{P}(x) \in U$.
- (c) Ist $x \in U$ und $f: x \rightarrow U$ eine beliebige Funktion, so ist $\bigcup_{a \in x} f(a) \in U$.

Beispiel 3.8.2 $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}^n(\emptyset)$ ist ein Grothendieck-Universum.

Lemma 3.8.3 Ist U ist ein Grothendieck-Universum, so ist $\mathcal{U} := (U, \in)$ ein Modell von $\text{ZFC} \setminus \{\text{Unendlichkeit}\}$. Enthält U eine unendliche Menge, so ist \mathcal{U} ein Modell von ZFC.

Definition 3.8.4 Eine Kardinalzahl κ heißt **stark unerreichbar**, wenn gilt:

- (a) $\kappa > \omega$.
- (b) Für alle Kardinalzahlen $\mu < \kappa$ gilt $2^\mu < \kappa$.
- (c) Jede Teilmenge $M \subset \kappa$ mit $\sup M = \kappa$ hat selbst schon Kardinalität κ .
(Eine Menge $M \subset \kappa$ mit $\sup M = \kappa$ nennt man **kofinal** in κ .)

Lemma 3.8.5 Sei U ein Universum. Dann gilt:

- (a) Für alle $x \in U$ ist $|x| < |U|$.
- (b) $c(U) := \sup_{x \in U} |x|$ erfüllt die Bedingungen (b) und (c) aus Definition 3.8.4.

Satz 3.8.6 Für $\alpha \in \text{On}$ definieren wir V_α rekursiv wie folgt: $V_0 := \emptyset$; $V_{s(\beta)} := V_\beta \cup \mathcal{P}(V_\beta)$; und für Limes-Ordinalzahlen λ : $V_\lambda := \bigcup_{\beta < \lambda} V_\beta$.

Ist κ eine stark unerreichbare Kardinalzahl, so ist (V_κ, \in) ein Universum.

4 Modelltheorie

4.1 Elementare Erweiterungen

Sei L eine Sprache. Sind im Folgenden $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$ Strukturen, so sind M, N, \dots immer die zugehörigen Grundmengen.

Definition 4.1.1 Ist \mathcal{M} eine L -Struktur und $A \subset M$, so setzt man $L(A) := L \cup A$, wobei die Elemente von A als (neue) Konstantensymbole aufgefasst werden, und \mathcal{M} wird als $L(A)$ -Struktur aufgefasst, indem jedes Konstantensymbol aus A als sich selbst interpretiert wird. (Formaler: $L(A) = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$ für Konstantensymbole c_a , und $c_a^{\mathcal{M}} = a$.)

Bemerkung 4.1.2 Jede $L(A)$ -Formel lässt sich schreiben als $\phi(\underline{x}, b)$, wobei $\phi(\underline{x}, y)$ eine L -Formel ist und $b_1, \dots, b_m \in A$ sind.

Notation 4.1.3 Wenn eine L -Struktur \mathcal{M} auch als Struktur in einer anderen Sprache aufgefasst werden könnte, schreiben wir die Sprache manchmal als Index dazu:

- (a) $\text{Th}_L(\mathcal{M})$ ist die Theorie von \mathcal{M} als L -Struktur.
- (b) $\mathcal{M} \equiv_L \mathcal{N}$ bedeutet, dass \mathcal{M} und \mathcal{N} als L -Strukturen elementar äquivalent sind.

Bemerkung 4.1.4 Ist \mathcal{M} eine L -Struktur und \mathcal{N} ein Modell von $\text{Th}_{L(M)}(\mathcal{M})$, so haben wir eine natürliche Einbettung von \mathcal{M} nach \mathcal{N} , indem wir $m \in M$ abbilden auf die Interpretation der entsprechenden Konstante in \mathcal{N} . In einer solchen Situation wir fassen \mathcal{M} meist als Unterstruktur von \mathcal{N} auf.

Definition 4.1.5 Ist \mathcal{M} eine Unterstruktur von \mathcal{N} mit $\mathcal{N} \equiv_{L(\mathcal{M})} \mathcal{M}$ (wie in Bemerkung 4.1.4), so nennt man \mathcal{M} eine **elementare Unterstruktur** von \mathcal{N} und \mathcal{N} eine **elementare Erweiterung** von \mathcal{M} . Notation dafür: $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ (oder $\mathcal{M} \prec_L \mathcal{N}$).

Ist $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine Einbettung von Strukturen, so nennen wir α eine **elementare Einbettung**, wenn $\mathcal{N} \equiv_{L(\mathcal{M})} \mathcal{M}$ gilt; hierbei werden die Konstanten $a \in M$ in N durch $\alpha(a)$ interpretiert.

Satz 4.1.6 (Tarski-Test) Eine Unterstruktur $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ ist genau dann eine elementare Unterstruktur, wenn für jede $L(\mathcal{M})$ -Formel $\phi(x)$ gilt: Wenn ein $a \in N$ existiert mit $\mathcal{N} \models \phi(a)$, dann existiert schon ein $a' \in M$ mit $\mathcal{N} \models \phi(a')$.

Lemma 4.1.7 Sind $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{N}$ L -Strukturen mit $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ und $\mathcal{M}' \prec \mathcal{N}$, so gilt auch $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$.

Satz 4.1.8 (Löwenheim-Skolem) Sei \mathcal{N} eine unendliche L -Struktur.

- (a) Für jede Kardinalzahl $\kappa \geq \max\{|N|, |L|\}$ existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{N}' \succ \mathcal{N}$ mit $|N'| = \kappa$.
- (b) Für jede Kardinalzahl κ mit $\max\{|L|, \aleph_0\} \leq \kappa \leq |N|$ existiert eine elementare Unterstruktur $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ mit $|M| = \kappa$.

Korollar 4.1.9 Wenn es ein Modell von ZFC gibt, dann gibt es auch ein abzählbares Modell von ZFC.

Satz 4.1.10 (Kompaktheitssatz) Ist T eine endlich konsistent L -Theorie (d. h. jede endliche Teilmenge von T ist konsistent), so ist T schon konsistent.

Definition 4.1.11 Sei \mathcal{M} eine L -Struktur, sei \underline{x} ein Tupel von Variablen, und sei Σ eine Menge von Formeln in \underline{x} . Σ heißt **endlich erfüllbar** (in \mathcal{M}), wenn für jede endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subset \Sigma$ ein $\underline{a} \in M^n$ existiert, so dass für alle $\phi(\underline{x}) \in \Sigma_0$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$. Existiert ein $\underline{a} \in M^n$, so dass $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ für alle $\phi(\underline{x}) \in \Sigma$ gilt, so sagt man \underline{a} **realisiert** Σ (und Σ ist in \mathcal{M} **erfüllbar** oder **realisiert**).

Satz 4.1.12 Sei \mathcal{M} eine L -Struktur und Σ eine endlich erfüllbare Menge von Formeln. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$, in der Σ realisiert ist.

4.2 Quantorenelimination

Sei weiterhin L eine Sprache.

Definition 4.2.1 (a) Formeln der Form $R(t_1, \dots, t_\ell)$ und $t_1 \doteq t_2$ (für L -Terme t_i und Relations-Symbole R) nennt man **atomar**.

- (b) Eine **boolesche Kombination** von L -Formeln ϕ_1, \dots, ϕ_n ist eine L -Formel der Form $\psi[\phi_1, \dots, \phi_n]$, wobei $\psi(\underline{P})$ eine aussagenlogische Formel ist.
- (c) Boolesche Kombinationen von atomaren Formeln nennt man **quantorenfrei**.

Bemerkung 4.2.2 Jede quantorenfreie Formel $\phi(\underline{x})$ ist äquivalent zu einer Formel der Form

$$\bigwedge_{i=1}^{k_1} \phi_{i,1}(\underline{x}) \quad \vee \quad \dots \quad \vee \quad \bigwedge_{i=1}^{k_\ell} \phi_{i,\ell}(\underline{x}),$$

wobei jedes $\phi_{i,\ell}(\underline{x})$ entweder eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel ist. (Dies nennt man die **disjunktive Normalform** von $\phi(\underline{x})$.)

Bemerkung 4.2.3 Sei $\phi(\underline{x})$ eine quantorenfreie L -Formel, seien $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ L -Strukturen und sei $\underline{a} \in \mathcal{M}$. Dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{N} \models \phi(\underline{a})$.

Definition 4.2.4 Sei \mathcal{M} eine L -Struktur und sei $A \subset M$. Die von A **erzeugte Unterstruktur** $\langle A \rangle_L$ von M ist die kleinste Unterstruktur von M , die A enthält: $\langle A \rangle_L = \{t^{\mathcal{M}}(\underline{a}) \mid t \text{ } L\text{-Term, } \underline{a} \in A^n\}$. Gilt $\langle A \rangle_L = M$, so sagt man, \mathcal{M} ist von A **erzeugt**. Eine Struktur \mathcal{M} heißt **endlich erzeugt**, wenn sie von einer endlichen Menge erzeugt ist.

Lemma 4.2.5 Sind \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 zwei von der leeren Menge erzeugte L -Strukturen, in denen die selben quantorenfreien L -Aussagen gelten, definiert $t^{\mathcal{M}_1} \mapsto t^{\mathcal{M}_2}$ (für L -Terme t) einen Isomorphismus $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$.

Definition 4.2.6 Eine Theorie T hat **Quantoren-Elimination** (oder „eliminiert Quantoren“), wenn jede L -Formel $\phi(\underline{x})$ modulo T zu einer quantorenfreien L -Formel $\psi(\underline{x})$ äquivalent ist.

Satz 4.2.7 Sei T eine L -Theorie. Wenn jede Formel $\phi(\underline{x})$ der folgenden Form modulo T zu einer quantorenfreien L -Formel äquivalent ist, hat T Quantoren-Elimination:

$$\phi(\underline{x}) = \exists y: \psi(\underline{x}, y),$$

wobei $\psi(\underline{x}, y)$ eine Konjunktion von atomaren und negierten atomaren Formeln ist.

Beispiel 4.2.8 Sei L die leere Sprache. Die L -Theorie $\text{INF} := \{\exists^{\geq n} x: \top\}$ eliminiert Quantoren.

Beispiel 4.2.9 Sei $L = \{<\}$ und sei DLO die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte, d. h. DLO besteht aus den folgenden L -Aussagen:

- (a) $<$ ist eine Ordnungsrelation.
- (b) $\forall x, x': (x < x' \rightarrow \exists y: x < y < x')$
- (c) $\forall x: \exists y, y': y < x < y'$.

DLO eliminiert Quantoren.

Satz 4.2.10 Sei T eine konsistente L -Theorie mit Quantoren-Elimination. Wir nehmen außerdem an, dass es eine L -Struktur \mathcal{A} gibt (nicht notwendigerweise ein Modell von T), die sich in jedes Modell von T einbetten lässt. Dann ist T vollständig.

Satz 4.2.11 Ist T eine L -Theorie mit Quantoren-Elimination, ist \mathcal{M} ein Modell von T , und ist $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ eine Unterstruktur, die auch ein Modell von T ist, so ist \mathcal{M}' schon eine elementare Unterstruktur von \mathcal{M} .

Satz 4.2.12 Eine L -Theorie T hat Quantoren-Elimination genau dann, wenn folgendes gilt:

Sind $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \models T$ Modelle, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine endlich erzeugte Unterstruktur, $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}'$ eine Einbettung und ist $\phi(\underline{a}, y)$ eine quantorenfreie $L(\mathcal{A})$ -Formel, so dass es ein $b \in \mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}, b)$, so gibt es auch ein $b' \in \mathcal{M}'$ mit $\mathcal{M}' \models \phi(\alpha(\underline{a}), b')$.

Lemma 4.2.13 Seien T_1, T_2 L -Theorien. Wir nehmen an, dass sich jedes Paar von Modellen $\mathcal{M}_1 \models T_1, \mathcal{M}_2 \models T_2$ durch eine quantorenfreie L -Aussage $\phi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$ „trennen“ lässt, d. h. $\mathcal{M}_1 \models \phi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$ und $\mathcal{M}_2 \models \neg \phi_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$. Dann existiert auch eine quantorenfreie L -Aussage ϕ mit $T_1 \models \phi$ und $T_2 \models \neg \phi$.

Korollar 4.2.14 Eine L -Theorie T hat Quantoren-Elimination genau dann, wenn folgendes gilt:

Sind $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \models T$ Modelle, ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine endlich erzeugte Unterstruktur, ist $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}'$ eine Einbettung und ist $b \in \mathcal{M}$, so existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}'' \succ \mathcal{M}'$, so dass sich α zu einer Einbettung $\langle \mathcal{A}, b \rangle_L \rightarrow \mathcal{M}''$ fortsetzen lässt.

Beispiel 4.2.15 Sei K ein Körper, $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r \cdot \mid r \in K\}$ die Sprache der K -Vektorräume wie in Beispiel 1.1.7 und sei VR_K die $L_{K\text{-VR}}$ -Theorie der K -Vektorräume. $\text{VR}_K \cup \text{INF}$ (für INF aus Beispiel 4.2.8) eliminiert Quantoren.

4.3 Algebraisch abgeschlossene Körper

In diesem Abschnitt arbeiten wir in der Sprache $L_{\text{ring}} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.

Lemma 4.3.1 Sei K ein unendlicher Körper. Dann existiert eine elementare Erweiterung $L \succ K$, die ein Element a enthält, das transzendent über K ist.

Definition 4.3.2 Sei ACF die L_{ring} -Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper und, für $p = 0$ oder p prim, ACF_p die L_{ring} -Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p .

Satz 4.3.3 ACF hat Quantoren-Elimination.

Korollar 4.3.4 Für $p = 0$ oder p prim ist ACF_p vollständig.

Korollar 4.3.5 Sind $K \subset L$ algebraisch abgeschlossene Körper, so ist L eine elementare Erweiterung von K .

Korollar 4.3.6 Für jede L_{ring} -Aussage ϕ sind äquivalent:

- (a) $\text{ACF}_0 \models \phi$
- (b) $\text{ACF}_p \models \phi$ für fast alle Primzahlen p .
- (c) $\text{ACF}_p \models \phi$ für unendlich viele Primzahlen p .

Satz 4.3.7 Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $f: K^n \rightarrow K^n$ eine polynomiale Abbildung, d. h. $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x}))$ für Polynome $f_1, \dots, f_n \in K[\underline{x}]$. Ist f injektiv, so ist f auch surjektiv.

Satz 4.3.8 (Hilberts Nullstellensatz) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $I \subsetneq K[\underline{x}]$ ein echtes Ideal. Dann existiert ein $\underline{a} \in K^n$, so dass für alle $f \in I$ gilt: $f(\underline{a}) = 0$.

Korollar 4.3.9 Ist K algebraisch abgeschlossen, so sind die maximalen Ideale von $K[\underline{x}]$ genau die Ideale der Form $I_{\underline{a}} = \{f \in K[\underline{x}] \mid f(\underline{a}) = 0\}$ für $\underline{a} \in K^n$.

4.4 Reell abgeschlossene Körper

In diesem Abschnitt arbeiten wir in der Sprache $L_{\text{oring}} := L_{\text{ring}} \cup \{<\}$ der angeordneten Ringe. Alle Ringe sind kommutativ und mit 1.

Definition 4.4.1 Ein **angeordneter Ring** ist ein Ring R mit einer Ordnungsrelation $<$, so dass für alle $a, b, c \in R$ gilt:

- (a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- (b) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$.

Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper, der ein angeordneter Ring ist.

Ein angeordneter Körper heißt **reell abgeschlossen**, wenn er keine echte angeordnete algebraische Erweiterung besitzt.

Ist K ein angeordneter Körper und $L \supset K$ eine reell abgeschlossene algebraische Erweiterung von K , so dass die Ordnung von L diejenige von K fortsetzt, so nennt man L einen **reellen Abschluss** von K .

Bemerkung 4.4.2 In angeordneten Ringen R gilt für alle $a, b \in R$:

- (a) $a > 0$ genau dann, wenn $-a < 0$.
- (b) $a^2 \geq 0$. (Insbesondere $1 > 0$.)
- (c) $ab > 0$ genau dann, wenn a und b beide positiv oder beide negativ sind.

Satz 4.4.3 Für angeordnete Körper K ist äquivalent:

- (a) K ist reell abgeschlossen.
- (b) Jedes positive Element von K ist ein Quadrat und jede Polynom $f \in K[x]$ von ungeradem Grad hat eine Nullstelle in K .
- (c) $K(i)$ ist algebraisch abgeschlossen (wobei $i = \sqrt{-1}$).

Insbesondere ist die Ordnungsrelation auf einem reell abgeschlossenen Körper schon allein durch die Körperstruktur festgelegt.

Definition 4.4.4 Sei RCF die L_{oring} -Theorie der reell abgeschlossenen Körper.

Lemma 4.4.5 Sei K ein Körper und $P \subset K$ eine Teilmenge mit $1 \in P$, $P \cdot P \subset P$ und so dass keine $a_i \in P$ und $b_i \in K$ existieren mit $\sum_{i=1}^n a_i b_i^2 = -1$. Dann lässt sich K so anordnen, dass alle Elemente von P nicht-negativ sind.

Korollar 4.4.6 Ist K reell abgeschlossen und ist $f \in K[x]$ irreduzibel, so ist $\deg f \in \{1, 2\}$, und falls $\deg f = 2$ ist, ist $f(a)$ entweder positiv für alle $a \in K$ oder negativ für alle $a \in K$. Insbesondere gilt für beliebige Polynome $f \in K[x]$: Sind $a_1 < \dots < a_n$ die Nullstellen von f und $a_0 := -\infty$, $a_{n+1} := +\infty$, so hat $f(x)$ auf jedem Intervall (a_i, a_{i+1}) konstantes Vorzeichen (für $0 \leq i \leq n$), und auf benachbarten Intervallen ist das Vorzeichen verschieden.

Lemma 4.4.7 Sei K ein Körper und seien L_1 und L_2 algebraische Erweiterungen von K . Wir nehmen an, dass jede endliche Erweiterung $K' \supset K$, die in L_1 liegt, sich nach L_2 einbetten lässt. Dann lässt sich schon ganz L_1 nach L_2 einbetten.

Lemma 4.4.8 Ist R ein angeordneter Ring, so lässt sich die Ordnung auf eindeutige Weise auf den Quotientenkörper $\text{Quot}(R)$ fortsetzen.

Satz 4.4.9 Jeder angeordnete Körper K besitzt bis auf eindeutigen Isomorphismus genau einen reellen Abschluss. („Bis auf eindeutigen Isomorphismus genau“)

einen“ bedeutet: Sind L_1, L_2 zwei reelle Abschlüsse von K , so existiert genau ein ordnungserhaltender Körperisomorphismus $L_1 \rightarrow L_2$, der auf K die Identität ist.)

Lemma 4.4.10 Ist K ein angeordneter Körper, sind L_1, L_2 reelle Abschlüsse von K und ist $f \in K[X]$ ein Polynom, so besitzt f gleich viele Nullstellen in L_1 und in L_2 .

Satz 4.4.11 RCF hat Quantoren-Elimination.

Korollar 4.4.12 RCF ist vollständig.

Satz 4.4.13 (Hilbert 17) Sei K ein reell abgeschlossener Körper (z. B. $K = \mathbb{R}$). Jedes Polynom $f \in K[\underline{x}]$, das auf K keine negativen Werte annimmt, ist Summe von Quadraten von rationalen Funktionen $g_i \in K(\underline{x})$.

Anwendungen der Modelltheorie in der Geometrie

5 Dimension und Rang

5.1 Definierbare Objekte

Sei L eine Sprache und \mathcal{M} eine L -Struktur mit Grundmenge M .

Definition 5.1.1 (a) Eine Teilmenge $X \subset M^n$ heißt **L -definierbar** (in \mathcal{M}), wenn es eine L -Formel $\phi(\underline{x})$ gibt, so dass $X = \{\underline{b} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{b})\}$. Man nennt X die „von ϕ definierte Menge“, und man schreibt $\phi(M)$ für diese Menge.

(b) Eine Funktion $M^n \rightarrow M$ heißt **L -definierbar**, wenn ihr Graph **L -definierbar** ist.

(c) Ein Element $a \in M$ heißt **L -definierbar**, wenn die Menge $\{a\}$ L -definierbar ist.

Bemerkung 5.1.2 Ist $X \subset M^n$ L -definierbar und $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{M})$, so ist $\alpha(X) = X$.

Notation 5.1.3 (a) Wenn die Sprache L , in der man arbeitet, festgelegt ist, verwendet man abkürzende Notationen: Ist $A \subset M$ eine Teilmenge, so schreibt man statt $L(A)$ -definierbar auch **A -definierbar** (oder auch: „über A definierbar“). In diesem Zusammenhang nennt man A oft eine **Parameter-Menge**. Statt L -definierbar schreibt man dann auch **\emptyset -definierbar**.

(b) Statt M -definierbar sagt man auch einfach nur **definierbar**.

(c) Der **definierbare Abschluss** einer Menge $A \subset M$ ist die Menge aller A -definierbaren Elemente von M ; Notation dafür: $\text{dcl}(A)$.

Bemerkung 5.1.4 Jede definierbare Menge/Funktion ist schon über einer endlichen Parametermenge definierbar.

Bemerkung 5.1.5 Ist $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ eine elementare Erweiterung, so hat man eine 1-zu-1-Entsprechung zwischen definierbaren Mengen $X \subset M^n$ in \mathcal{M} und M -definierbaren Mengen $X' \subset (M')^n$ in \mathcal{M}' ; die Entsprechung ist gegeben durch $X = X' \cap M^n$.

Beispiel 5.1.6 Ist M eine unendliche Menge in der Sprache $L = \emptyset$ oder eine K -Vektorraum in der Sprache $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r \cdot \mid r \in K\}$ oder ein algebraisch abgeschlossener Körper in der Sprache L_{ring} , so sind die definierbaren Teilmengen von M genau die endlichen und die ko-endlichen Mengen. (Eine Menge $X \subset M$ heißt ko-endlich, wenn das Komplement $M \setminus X$ endlich ist.)

Beispiel 5.1.7 Ist M eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte in der Sprache $L = \{<\}$ oder ein reell abgeschlossener Körper in der Sprache $L_{\text{oring}} = L_{\text{ring}} \cup \{<\}$, so sind die definierbaren Teilmengen von M genau endliche Vereinigungen von Punkten und Intervallen. (Hierbei sind auch ein- oder beidseitig unendliche Intervalle erlaubt.)

Definition 5.1.8 Seien \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 Strukturen in zwei verschiedenen Sprachen L_1 und L_2 , aber mit der gleichen Grundmenge $M = M_1 = M_2$. Man sagt, L_2 ist ein **Redukt** von L_1 , wenn die Interpretationen aller Symbole aus L_2 L_1 -definierbar sind. Wenn zusätzlich auch L_1 ein Redukt von L_2 ist, sagt man, L_1 und L_2 sind **interdefinierbar**.

Lemma 5.1.9 L_2 ist ein Redukt von L_1 genau dann, wenn jede L_2 -definierbare Menge auch L_1 -definierbar ist.

Lemma 5.1.10 Jede Sprache L ist zu einer **relationalen Sprache** L' interdefinierbar, d. h. L' enthält nur Relationssymbole. Außerdem können wir zusätzlich erreichen, dass $\text{Th}(\mathcal{M})$ in der Sprache L' Quantoren-Elimination hat.

(Manchmal erlaubt man in relationalen Sprachen auch Konstantensymbole.)

5.2 Typen und Saturiertheit

Sei weiterhin L eine Sprache und \mathcal{M} eine L -Struktur mit Grundmenge M .

Definition 5.2.1 Sei $A \subset M$.

- (a) Ein **partieller Typ** über A ist eine endlich erfüllbare Menge Σ von $L(A)$ -Formeln in \underline{x} . (Für „endlich erfüllbar“ siehe Definition 4.1.11.) Statt Σ schreiben wir auch oft $\Sigma(\underline{x})$. Man sagt auch, $\Sigma(\underline{x})$ ist ein partieller Typ „in \underline{x} “, oder ein „partieller n -Typ“ wenn \underline{x} ein n -Tupel ist.
- (b) Sei $\Sigma(\underline{x})$ ein partieller Typ und $\phi(\underline{x})$ eine $L(A)$ -Formel. Wir schreiben $\Sigma(\underline{x}) \models \phi(\underline{x})$, wenn $\psi_1(\underline{x}), \dots, \psi_k(\underline{x}) \in \Sigma(\underline{x})$ existieren, so dass $\mathcal{M} \models \forall \underline{x}: (\bigwedge_{i=1}^k \psi_i(\underline{x}) \rightarrow \phi(\underline{x}))$. Wir schreiben $\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$ wenn für alle $\phi(\underline{x}) \in \Sigma'(\underline{x})$ gilt: $\Sigma(\underline{x}) \models \phi(\underline{x})$. Wir nennen $\Sigma(\underline{x})$ und $\Sigma'(\underline{x})$ **äquivalent**, wenn sowohl $\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$ als auch $\Sigma'(\underline{x}) \models \Sigma(\underline{x})$ gilt. Oft werden wir äquivalente partielle Typen einfach miteinander identifizieren.
- (c) Ein **vollständiger Typ** über A ist ein partieller Typ über A , so dass für jede $L(A)$ -Formel $\phi(\underline{x})$ entweder $\Sigma(\underline{x}) \models \phi(\underline{x})$ oder $\Sigma(\underline{x}) \models \neg\phi(\underline{x})$ gilt. Wenn wir nur **Typ** sagen, meinen wir „vollständiger Typ“. Vollständige Typen heißen üblicherweise $p(\underline{x})$ (statt $\Sigma(\underline{x})$).
- (d) Die Menge aller n -Typen über einer Menge A bis auf Äquivalenz wird mit $S_n(A)$ bezeichnet.
- (e) Der **Typ** über A eines Tupels $\underline{b} \in M^n$ ist $\text{tp}(\underline{b}/A) := \{\phi(\underline{x}) \in L(A) \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{b})\}$.

Bemerkung: $\Sigma(\underline{x})$ ist endlich erfüllbar genau dann, wenn eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ existiert, in der $\Sigma(\underline{x})$ realisiert (siehe Definition 4.1.11) ist.

Beispiel 5.2.2 Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $A \subset K$ und K_0 der kleinste algebraisch abgeschlossene Unterkörper von K , der A enthält, so haben alle Elemente von $K \setminus K_0$ denselben Typ über A .

Definition 5.2.3 Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Die Struktur \mathcal{M} heißt **κ -saturiert**, wenn für jede Teilmenge $A \subset M'$ mit $|A| < \kappa$ gilt: Jeder Typ über A ist in \mathcal{M} realisiert.

Satz 5.2.4 Für jede L -Struktur \mathcal{M} und jede unendliche Kardinalzahl κ existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$, die κ -saturiert ist.

Notation 5.2.5 Ist κ eine Kardinalzahl, so bezeichnet κ^+ die nächst-größere Kardinalzahl.

Lemma 5.2.6 Ist κ eine Kardinalzahl und A eine Teilmenge von κ^+ mit $|A| < \kappa^+$, so existiert eine Ordinalzahl $\gamma < \kappa^+$ mit $A \subset \gamma$.

Lemma 5.2.7 Ist I eine beliebige Indexmenge und sind \mathcal{M}_i (für $i \in I$) L -Strukturen, die eine Kette bezüglich elementarer Einbettung bilden (also $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ oder $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_i$ für alle $i, j \in I$), so ist die Vereinigung $\mathcal{M} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ eine elementare Erweiterung von \mathcal{M}_i für alle $i \in I$.

5.3 Dimension von Strukturen

Sei weiterhin L eine Sprache und \mathcal{M} eine L -Struktur.

Definition 5.3.1 Sei $A \subset M$.

- (a) Ein Element $b \in M$ heißt **algebraisch** über A , wenn eine endliche, A -definierbare Menge $X \subset M$ existiert, die b enthält.
- (b) Ein Typ $p \in S_1(A)$ heißt algebraisch, wenn er eine $L(A)$ -Formel $\phi(x)$ enthält, die eine endliche Menge definiert.
- (c) Der **algebraische Abschluss** von A ist die Menge aller über A algebraischen Elemente von M ; Notation dafür: $\text{acl}(A)$.

Beispiel 5.3.2 (a) Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \subset K$, so ist $\text{acl}(A)$ der algebraische Abschluss des Körpers $\text{dcl}(A)$.
 (b) Ist K ein reell abgeschlossener Körper und $A \subset K$, so ist $\text{acl}(A)$ der reelle Abschluss des Körpers $\text{dcl}(A)$.
 (c) Ist V ein K -Vektorraum und $A \subset V$, so ist $\text{acl}(A) = \text{dcl}(A) = \langle A \rangle_K$.

Bemerkung 5.3.3 Ist $p \in S_1(A)$ algebraisch (für $A \subset M$), so existiert eine einzelne Formel $\phi(x) \in p$ mit $\phi(x) \models p$. (Man sagt, $\phi(x)$ **isoliert** p .) Daraus folgt, dass p bereits in \mathcal{M} realisiert ist.

Lemma 5.3.4 Für $A, B \subset M$ gilt:

- (a) $A \subset \text{acl}(A)$
- (b) $A \subset B \Rightarrow \text{acl}(A) \subset \text{acl}(B)$
- (c) $\text{acl}(\text{acl}(A)) = \text{acl}(A)$
- (d) $\text{acl}(A) = \bigcup_{\substack{A_0 \subset A \\ A_0 \text{ endl.}}} \text{acl}(A_0)$

Definition 5.3.5 Man sagt „ acl hat die **Austauscheigenschaft**“, wenn gilt: Sind $A \subset M$ und $b, c \in M$ mit $c \in \text{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \text{acl}(A)$, so ist $b \in \text{acl}(A \cup \{c\})$.

Für den Rest von Abschnitt 5.3 nehmen wir an, dass M eine Struktur ist, so dass acl die Austauscheigenschaft hat. Außerdem sei $X \subset M$ eine Teilmenge mit $\text{acl}(X) = X$.

Definition 5.3.6 (a) Eine Menge $A \subset M$ heißt **algebraisch unabhängig**, wenn für alle $a \in A$ gilt: $a \notin \text{acl}(A \setminus \{a\})$.

- (b) Eine **Basis** von X ist eine algebraisch unabhängige Menge $A \subset X$ mit $\text{acl}(A) = X$.

Satz 5.3.7 Alle Basen von X haben die gleiche Kardinalität.

Lemma 5.3.8 Ist $A \subset M$ unabhängig und $b \in M \setminus \text{acl}(A)$, so ist auch $A \cup \{b\}$ unabhängig.

Satz 5.3.9 Ist $A \subset X$ unabhängig, so existiert eine Basis A' von X mit $A \subset A'$. Insbesondere besitzt X (mindestens) eine Basis.

Definition 5.3.10 Die **Dimension** $\dim X$ von X ist die Kardinalität einer (beliebigen) Basis von X .

Beispiel 5.3.11 (a) Ist M ein Vektorraum (und somit X ein Untervektorraum), so ist die Dimension von X die übliche Dimension aus der linearen Algebra.

- (b) Ist K ein Körper und K^{alg} sein algebraischer Abschluss (den wir als L -ring-Struktur auffassen), so setzt man $\text{trdeg } K := \dim K^{\text{alg}}$. Man nennt dies den **Transzendenzgrad** von K . Eine Basis von K^{alg} , die in K enthalten ist, nennt man **Transzendenzbasis** von K .

Lemma 5.3.12 Für $A \subset M$ gilt: $|\text{acl}(A)| \leq \max\{|A|, |L|, \aleph_0\}$.

Notation 5.3.13 Statt $\text{dcl}(A)$ und $\text{acl}(A)$ schreiben wir manchmal auch $\text{dcl}_L(A)$ und $\text{acl}_L(A)$ (insbesondere wenn wir M auch als Struktur in anderen Sprachen auffassen).

Lemma 5.3.14 Sei $A \subset M$. Wenn acl_L die Austausch eigenschaft hat, so hat auch $\text{acl}_{L(A)}$ die Austausch eigenschaft.

Definition 5.3.15 Ist $B \subset M$, so meinen wir bei den Betreffenden „algebraisch unabhängig“, „Basis“, „Dimension“ mit „**über** B “, dass wir in der Sprache $L(B)$ arbeiten. Die Dimension über B einer Menge $X = \text{acl}_{L(B)}(X) \subset M$ wird auch als „**relative Dimension** über B “ bezeichnet, und die Notation dafür ist $\dim_B(X)$ (oder $\dim_{L(B)}(X)$).

Lemma 5.3.16 Für $A, B \subset M$ gilt: $\dim \text{acl}(A) = \dim \text{acl}(A \cup B) + \dim_B \text{acl}_{L(B)}(A)$.

5.4 Elementare Abbildungen

Definition 5.4.1 Seien $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ beliebige L -Strukturen und seien $A \subset M, A' \subset M'$. Eine Bijektion $f: A \rightarrow A'$ heißt **elementar**, wenn für jede L -Formel $\phi(\underline{x})$ und jedes Tupel $\underline{a} \in A^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{M}' \models \phi(f(\underline{a}))$.

Bemerkung 5.4.2 Eine Abbildung $f: A \rightarrow A'$ ist elementar genau dann, wenn für jede endliche Teilmenge $A_0 \subset A$ die Einschränkung $f|_{A_0}$ elementar ist.

Lemma 5.4.3 Ist $f: A \rightarrow A'$ eine elementare Abbildung, für $A \subset M, A' \subset M'$, so erhält man eine Bijektion $f_*: S_n(A) \rightarrow S_n(A')$, die definiert ist durch: $f_*(p) = \{\phi(\underline{x}, f(\underline{a})) \mid \phi(\underline{x}, \underline{a}) \in p\}$.

Bemerkung 5.4.4 Ist $f: A \rightarrow A'$ elementar (für $A \subset M$, $A' \subset M'$) und sind $\underline{b} \in M$ und $\underline{b}' \in M'$, so sind äquivalent:

- (a) $f_*(\text{tp}(\underline{b}/A)) = \text{tp}(\underline{b}'/A')$
- (b) f lässt sich zu einer elementaren Abbildung $A \cup \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow A' \cup \{b'_1, \dots, b'_n\}$ fortsetzen mit $f(b_i) = b'_i$.

Bemerkung 5.4.5 Ist f wie im vorigen Lemma, so bildet f_* algebraische Typen auf algebraische Typen ab.

Satz 5.4.6 Seien \mathcal{M} und \mathcal{M}' L -Strukturen, seien $A \subset M$ und $A' \subset M'$, und sei $f: A \rightarrow A'$ eine elementare Bijektion. Sei $\kappa := |M|$.

- (a) Die Abbildung f lässt sich zu einer elementaren Bijektion $\text{acl}(A) \rightarrow \text{acl}(A')$ fortsetzen.
- (b) Ist \mathcal{M}' μ -saturiert für $\mu = \max\{\kappa, |A|^+\}$, so lässt sich f zu einer elementaren Einbettung $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ fortsetzen.
- (c) Ist $|A| < \kappa$, $|M'| = \kappa$ und sind sowohl \mathcal{M} als auch \mathcal{M}' κ -saturiert, so lässt sich f zu einem Isomorphismus $M \rightarrow M'$ fortsetzen.

5.5 Streng minimale Strukturen

Definition 5.5.1 (a) Eine vollständige Theorie T , deren Modelle unendlich sind, heißt **streng minimal**, wenn für alle Modelle $\mathcal{M} \models T$ gilt: Jede definierbare Teilmenge $X \subset M$ ist entweder endlich oder ko-endlich.

- (b) Eine unendliche Struktur \mathcal{M} heißt **streng minimal**, wenn $\text{Th}(\mathcal{M})$ streng minimal ist.

Beispiel 5.5.2 Nach Beispiel 5.1.6 sind die folgenden Theorien streng minimal: die \emptyset -Theorie der unendlichen Mengen; die $L_{K\text{-VR}}$ -Theorie der unendlichen K -Vektorräume; die L_{ring} -Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper.

Für den Rest von Abschnitt 5.5 sei T eine streng minimale Theorie und \mathcal{M} ein Modell von T .

Lemma 5.5.3 Sei $\underline{b} \in M^n$ Tupel mit $b_i \notin \text{acl}(b_1, \dots, b_{i-1})$ für $i = 1, \dots, n$. Sei außerdem \mathcal{M}' ein weiteres Modell von T und $\underline{b}' \in (M')^n$ ein Tupel, das die analoge Bedingung zu \underline{b} erfüllt. Dann ist $\text{tp}(\underline{b}/\emptyset) = \text{tp}(\underline{b}'/\emptyset)$.

Satz 5.5.4 Ist \mathcal{M} streng minimal, so hat acl die Austauschenschaft.

Satz 5.5.5 Sei T streng minimal. Dann sind Modelle von T bis auf Isomorphie durch ihre Dimension klassifiziert (d. h. für $M, M' \models T$ gilt: $M \cong M' \iff \dim M = \dim M'$). Außerdem existiert eine Kardinalzahl $\kappa \leq \aleph_0$, so dass T ein Modell der Dimension μ besitzt genau dann, wenn $\mu \geq \kappa$ ist.

5.6 O-minimale Strukturen

Definition 5.6.1 Sei L eine Sprache, die $L_{\text{ord}} = \{<\}$ enthält. Eine L -Struktur \mathcal{M} heißt **o-Minimal**, wenn sie als L_{ord} -Struktur ein Modell von DLO ist (also wenn „ $<$ “ eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte auf M definiert) und wenn jede definierbare Teilmenge von M bereits L_{ord} -definierbar ist.

Bemerkung 5.6.2 Die definierbaren Teilmengen von M sind also genau die endlichen Vereinigungen von Punkten und Intervallen (wobei auch ein- oder beidseitig unendliche Intervalle erlaubt sind).

Beispiel 5.6.3 Die Beispiele 5.1.7 sind o -Minimal.

Im folgenden sei \mathcal{M} immer o -minimal.

Lemma 5.6.4 Für jede Menge $A \subset M$ gilt: $\text{dcl}(A) = \text{acl}(A)$.

Definition 5.6.5 Wir fassen M als topologischen Raum auf mit der Intervalltopologie, d. h. eine Teilmenge $X \subset M$ heißt offen, wenn zu jedem $a \in X$ Elemente $b_1 < a < b_2 \in M$ existieren, so dass das ganze Intervall (b_1, b_2) in X liegt.

Lemma 5.6.6 Jedes (offene) Intervall $I \subset M$ ist definierbar zusammenhängend, d. h. ist $X \subset I$ definierbar und sind sowohl X als auch $I \setminus X$ offen, so ist entweder $X = \emptyset$ oder $X = I$.

Satz 5.6.7 (Monotonie-Satz) Ist $f: M \rightarrow M$ definierbar, so existieren $a_0 = -\infty < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = +\infty$, so dass für f auf jedem der offenen Intervalle (a_{i-1}, a_i) ($1 \leq i \leq n$) streng monoton steigend oder streng monoton fallend oder konstant. Außerdem ist f auf jedem dieser Intervalle stetig.

Satz 5.6.8 In o -minimalen Strukturen hat acl die Austausch eigenschaft.

Lemma 5.6.9 (Endlichkeitslemma) Sei $\phi(x, \underline{y})$ eine Formel, so dass für alle $\underline{b} \in M$ die Menge $\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ endlich ist. Dann sind die Kardinalitäten dieser Mengen beschränkt, d. h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|\phi(\mathcal{M}, \underline{b})| \leq N$ für alle $\underline{b} \in M^n$.

Satz 5.6.10 Ist \mathcal{M} o -minimal und $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$, so ist auch \mathcal{M}' o -minimal.

5.7 Der acl -Rang von definierbaren Mengen

In diesem Abschnitt fixieren wir eine vollständige Theorie T und ein Modell $\mathcal{M} \models T$. Bis auf weiteres nehmen wir an, dass acl in allen Modellen von T die Austausch eigenschaft besitzt.

Lemma 5.7.1 Falls acl die Austausch eigenschaft besitzt: Sei $X = \phi(\mathcal{M}) \subset M^n$ eine definierbare Menge. Wir betrachten eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ und setzen $X' := \phi(\mathcal{M}') \subset (M')^n$. Außerdem betrachten wir eine Menge $A \subset M'$, so dass X' A -definierbar ist und M' $|A|^+$ -saturiert ist. Dann hängt das Maximum

$$\max_{(x_1, \dots, x_n) \in X'} \dim_A \text{acl}(x_1, \dots, x_n)$$

nur von X ab, aber nicht von der Wahl von \mathcal{M}' und von A .

Definition 5.7.2 Falls acl die Austausch eigenschaft besitzt: Dieses Maximum aus Lemma 5.7.1 nennt man den **Rang** (oder „ acl -Rang“) von X ; Notation dafür: $\text{rk}(X)$ (oder rk^{acl}). Ist $X = \emptyset$, so setzt man $\text{rk}(X) := -\infty$.

Satz 5.7.3 Falls acl die Austauschenschaft besitzt: Seien $X, X' \subset M^m$ und $Y \subset M^n$ definierbare Mengen. Dann gilt:

- (a) $\text{rk}(X) = 0$ genau dann, wenn X endlich aber nicht leer ist.
- (b) $\text{rk}(M) = 1$.
- (c) $\text{rk}(X \cup X') = \max\{\text{rk}(X), \text{rk}(X')\}$.
Insbesondere: $X \subset X' \Rightarrow \text{rk}(X) \leq \text{rk}(X')$.
- (d) Ist $r \in \mathbb{N}$ und ist $f: X \rightarrow Y$ eine definierbare Abbildung, so dass $\text{rk}(f^{-1}(y)) = r$ gilt für jedes $y \in Y$, so ist $\text{rk}(X) = r + \text{rk}(Y)$.
Insbesondere gilt $\text{rk}(X \times Y) = \text{rk}(X) + \text{rk}(Y)$, und wenn eine definierbare Bijektion $f: X \rightarrow Y$ existiert, so ist $\text{rk}(X) = \text{rk}(Y)$.

Aus dem Satz folgt insbesondere: Für definierbare $X \subset M^n$ gilt $\text{rk} X \leq n$.

Lemma 5.7.4 Falls acl die Austauschenschaft besitzt: Ist $X \subset M^n$ eine definierbare Menge mit Rang $\geq d$, so existiert eine Koordinatenprojektion $\pi: M^n \rightarrow M^d$, so dass $\pi(X)$ Rang d hat. (Koordinatenprojektion bedeutet: Es existieren $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$, so dass $\pi(\underline{x}) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ gilt.)

Beispiel 5.7.5 In o-minimalen Strukturen gilt für definierbare Mengen $X \subset M^n$: X hat Rang n genau dann, wenn X eine offene Box $I_1 \times \dots \times I_n$ enthält. (Zusammen mit Lemma 5.7.4 kann man damit leicht den Rang beliebiger definierbarer Mengen bestimmen.)

Definition 5.7.6 Eine L-Theorie T „eliminiert \exists^∞ “, wenn zu jeder L-Formel $\phi(x, y)$ eine L-Formel $\psi(y)$ existiert, so dass für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jedes Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \psi(\underline{b})$ genau dann, wenn unendlich viele $a \in M$ existieren mit $\mathcal{M} \models \phi(a, \underline{b})$.

Lemma 5.7.7 Eine Theorie T eliminiert \exists^∞ genau dann, wenn für jede L-Formel $\phi(x, y)$ eine natürliche Zahl N existiert, so für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jedes Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: Entweder $\phi(M, \underline{b})$ ist unendlich oder $|\phi(M, \underline{b})| \leq N$.

Beispiel 5.7.8 Streng minimale und o-minimale Theorien eliminieren \exists^∞ .

Satz 5.7.9 Falls acl die Austauschenschaft besitzt und $\text{Th}(\mathcal{M}) \exists^\infty$ eliminiert, „ist der Rang definierbar“, d. h. für jede Formel L-Formel $\phi(\underline{x}, y)$ existieren Formeln $\psi_d(y)$ ($d \in \mathbb{N}$), so dass für alle \underline{b} gilt: $\text{rk}(\phi(M, \underline{b})) = d$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \psi_d(\underline{b})$ gilt.

5.8 Der Morley-Rang von definierbaren Mengen

Definition 5.8.1 Sei $X \subset M^n$ eine definierbare Menge. Der **Morley-Rang** $\text{MR}(X) \in \text{On} \cup \{\pm\infty\}$ wird definiert, indem man rekursiv festlegt, welche Mengen Morley-Rang größer gleich α haben, für jede Ordinalzahl α . Wir nehmen hierbei an, dass \mathcal{M} \aleph_0 -saturiert ist. (Ist dies nicht der Fall, geht man zunächst zu einer \aleph_0 -saturierten elementaren Erweiterung über.)

- (a) $\text{MR}(X) \geq 0$ genau dann, wenn X nicht leer ist. (Für leere Mengen setzt man $\text{MR}(\emptyset) := -\infty$.)
- (b) Für jede Ordinalzahl β : $\text{MR}(X) \geq \beta + 1$ genau dann, wenn unendlich viele disjunkte definierbare Teilmengen $X_i \subset X$ existieren mit $\text{MR}(X_i) \geq \beta$.
- (c) Für Limes-Ordinalzahlen λ : $\text{MR}(X) \geq \lambda$ genau dann, wenn $\text{MR}(X) \geq \beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Wenn nach dieser Definition $\text{MR}(X) \geq \beta$ für jede Ordinalzahl β ist, setzt man $\text{MR}(X) := \infty$. Man sagt auch „ X hat einen Morley-Rang“ wenn $\text{MR}(X) < \infty$ ist.

Ist $X = \phi(M)$ (für eine Formel $\phi(\underline{x})$), so schreiben wir statt $\text{MR}(X)$ auch $\text{MR}(\phi)$.

Bemerkung 5.8.2 Der Morley-Rang hängt nicht vom Modell ab, in dem man ihn berechnet: Ist $\phi(\underline{x})$ eine L -Formel, und sind $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ beide \aleph_0 -saturiert, so ist $\text{MR}(\phi(\mathcal{M})) = \text{MR}(\phi(\mathcal{M}'))$.

Für den Rest dieses Abschnitts nehmen wir an, dass \mathcal{M} \aleph_0 -saturiert ist.

Bemerkung 5.8.3 Sind X und Y definierbare Mengen und ist $f: X \rightarrow Y$ eine definierbare Bijektion, so ist $\text{MR}(X) = \text{MR}(Y)$.

Bemerkung 5.8.4 Für definierbare Menge $X, X' \subset M^m$ gilt: $\text{MR}(X \cup X') = \max\{\text{MR}(X), \text{MR}(X')\}$. Insbesondere folgt aus $X \subset X'$, dass $\text{MR}(X) \leq \text{MR}(X')$ ist.

Satz 5.8.5 Sei \mathcal{M} eine Struktur, so dass acl in jeder elementar äquivalenten Struktur $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ die Austauscheneigenschaft besitzt (so dass also rk definiert ist). Dann gilt für jede definierbare Menge $X \subset M^n$: $\text{MR}(X) \geq \text{rk}(X)$. Ist \mathcal{M} streng minimal, so ist $\text{rk}(X) = \text{MR}(X)$.

Definition 5.8.6 Sei α eine Ordinalzahl. Eine definierbare Menge X heißt α -streng-minimal, wenn $\text{MR}(X) = \alpha$ ist und wenn für jede definierbare Teilmenge $Y \subset X$ gilt: Entweder $\text{MR}(Y) < \alpha$ oder $\text{MR}(X \setminus Y) < \alpha$.

Bemerkung 5.8.7 Eine Struktur \mathcal{M} ist streng minimal genau dann, wenn M (als definierbare Menge) 1-streng-minimal ist.

Satz 5.8.8 Ist X eine definierbare Menge mit Morley-Rang $\alpha \in \text{On}$, so lässt sich X in endlich viele disjunkte definierbare Teilmengen Y_1, \dots, Y_d zerlegen, die alle α -streng-minimal sind. Diese Zerlegung ist „eindeutig bis auf Mengen kleineren Rangs“, d. h. ist $Y'_1, \dots, Y'_{d'}$ eine weitere solche Zerlegung von X , so ist $d' = d$, und nach Umnummerierung gilt $\text{rk}(Y_i \setminus Y'_i) < \alpha$ und $\text{rk}(Y'_i \setminus Y_i) < \alpha$.

Definition 5.8.9 Das d aus Satz 5.8.8 nennt man den **Morley-Grad** von X ; Notation dafür: $\text{MD}(X)$. Ist $X = \phi(M)$, so setzen wir auch wieder $\text{MD}(\phi) := \text{MD}(X)$.

Bemerkung 5.8.10 Sind $X, Y \subset M^n$ disjunkte definierbare Mengen mit $\text{MR}(X) = \text{MR}(Y)$, so ist $\text{MD}(X \cup Y) = \text{MD}(X) + \text{MD}(Y)$.

Lemma 5.8.11 Sei $A \subset M$, sei $\alpha \in \text{On}$ und sei X eine A -definierbare α -streng-minimale Menge. Dann ist $\{\phi(x) \text{ L}(A)\text{-Fml} \mid \text{MR}(\phi(M) \cap X) = \alpha\}$ ein vollständiger Typ.

Definition 5.8.12 Den Typ aus dem vorigen Lemma nennt man den **generischen Typ** von X über A . Realisierungen dieses generischen Typs nennt man über A **generische Elemente** von X .

Lemma 5.8.13 *Wir nehmen an, dass der Morley-Rang definierbar ist, d. h. dass für jede L -Formel $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ und jedes $\alpha \in \text{On}$ eine L -Formel $\psi_\alpha(\underline{y})$ existiert, so dass für alle $\underline{b} \in M^m$ gilt: $\text{MR}(\phi(M, \beta)) = \alpha \iff M \models \psi(\underline{b})$.*

Sei $M_0 \prec M$ eine elementare Unterstruktur, und $p \in S_n(M_0)$ ein Typ, der eine Formel $\phi(\underline{x})$ enthält, die eine Menge $\phi(M)$, die Morley-Rang $< \infty$ hat. Dann ist p der generische Typ einer α -streng-minimalen Menge, für ein gewisses $\alpha \in \text{On}$.

5.9 Total transzendente Theorien

Sei (weiterhin) \mathcal{M} eine unendliche L -Struktur und sei $T := \text{Th}(\mathcal{M})$.

Definition 5.9.1 *Eine Theorie T heißt **total transzendent**, wenn in keinem Modell von T ein unendlicher binärer Baum von nicht-leeren definierbaren Mengen existiert, also definierbare Mengen $X_s \subset M^n$, wobei s alle endlichen 0-1-Folgen durchläuft, so dass für alle s gilt: $X_{s0} \subset X_s, X_{s1} \subset X_s, X_{s0} \cap X_{s1} = \emptyset$.*

Satz 5.9.2 *Eine Theorie T ist total transzendent genau dann, wenn jede definierbare Menge einen Morleyrang besitzt. Genauer gilt: Eine definierbare Menge X in einer \aleph_0 -saturierten Struktur hat Morleyrang ∞ genau dann, wenn sie die Wurzel eines binären Baums von nicht-leeren definierbaren Mengen ist.*

Definition 5.9.3 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Theorie T heißt **κ -stabil**, wenn für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und jede Parametermenge $A \subset M$ mit Kardinalität $|A| \leq \kappa$ höchstens κ -viele Typen über A existieren. Man nennt T **stabil**, wenn ein κ existiert, so dass T κ -stabil ist.*

Satz 5.9.4 *Für eine Theorie T gelten die folgenden Implikationen:*

T ist \aleph_0 -stabil $\Rightarrow T$ ist total-transzendent $\Rightarrow T$ ist κ -stabil für jedes $\kappa \geq |T|$.

Insbesondere: Ist L höchstens abzählbar, so ist \aleph_0 -stabil äquivalent zu total transzendent.

Bemerkung 5.9.5 *Ist T (wie hier immer angekommen) eine vollständige L -Theorie mit unendlichen Modellen, so gilt $|T| = \max\{|L|, \aleph_0\}$.*

Satz 5.9.6 *Für Theorien T sind äquivalent:*

- (a) *T ist stabil.*
- (b) *T ist 2^μ -stabil für jedes $\mu \geq |T|$.*
- (c) *Folgendes existiert nicht: ein Modell $M \models T$, Tupel $\underline{a}_i \in M^n$ für $i \in \mathbb{N}$ und eine Formel $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ so dass $M \models \phi(\underline{a}_i, \underline{a}_j)$ gilt genau dann, wenn $i < j$.*

Lemma 5.9.7 (Ramsey) *Sei B eine unendliche Menge und E eine zweistellige symmetrische Relation auf B . Dann existiert eine unendliche Teilmenge $A \subset B$, so dass $E(a, a')$ entweder für alle Paare oder für kein Paar $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ gilt.*

Lemma 5.9.8 (Erdős-Makkai) *Sei B eine unendliche Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(B)$ eine Menge von Teilmengen von B mit $|\mathcal{S}| > |B|$. Dann existieren Folgen $b_i \in B$ und $M_i \in \mathcal{S}$, für $i \in \mathbb{N}$, so dass entweder*

$$b_i \in M_j \iff i < j$$

oder

$$b_i \in M_j \iff i > j$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma 5.9.9 Für jedes $\kappa \geq \aleph_0$ existiert eine angeordnete Menge $(N, <)$ und eine Teilmenge $A \subset N$ mit $|A| \leq \kappa$, so dass $|S_1(A)| > \kappa$ ist.

Beispiel 5.9.10 Wir betrachten eine Gruppe G als Struktur in der Sprache $L_{\text{mgrp}} = \{1, \cdot, {}^{-1}\}$. Ist G total transzendent, so existiert keine unendliche absteigende Folge von definierbaren Untergruppen $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots$ in G .

Beispiel 5.9.11 Ist K ein Körper der Charakteristik p , so dass nicht jedes Element von K eine p -te Potenz ist, so ist K nicht total transzendent. Insbesondere ist $\mathbb{F}_p(t)$ nicht total transzendent.

5.10 Algebraisch abgeschlossene Körper

In diesem Abschnitt sei k immer ein Körper und K ein $\max\{|k|^+, \aleph_0\}$ -saturierter algebraisch abgeschlossener Körper, der k enthält. Wir arbeiten in der Sprache $L = L_{\text{ring}}$.

Definition 5.10.1 Sei $B \subset k[\underline{x}]$ eine beliebige Menge von Polynomen. Wir definieren $V(B) := \{\underline{a} \in K^n \mid \forall f \in B: f(\underline{a}) = 0\}$. Teilmengen von K^n der Form $V(B)$ nennt man **algebraisch** (über k) oder auch **Zariski-abgeschlossen** (über k).

Für $Y \subset K^n$ beliebig setzt man $I(Y) := \{f \in k[\underline{x}] \mid \forall \underline{a} \in Y: f(\underline{a}) = 0\}$. Der **Zariski-Abschluss** von Y (über k) ist definiert als $V(I(Y))$.

Bemerkung: Ist $B \subset k[\underline{x}]$ und $I \subset k[\underline{x}]$ das von B erzeugte Ideal, so ist $V(B) = V(I)$.

Im Folgenden werden wir immer über k arbeiten und dies deshalb nicht jedes Mal erwähnen.

Bemerkung 5.10.2 Die Zariski-abgeschlossenen Mengen machen K^n zu einem topologischen Raum. Man nennt dies die **Zariski-Topologie** (über K). Der Zariski-Abschluss Y^{Zar} von Y ist der Abschluss von Y im Sinne dieser Topologie; insbesondere ist Y algebraisch genau dann, wenn $V(I(Y)) = Y$ gilt.

Satz 5.10.3 Für jedes Ideal $I \subset k[\underline{x}]$ ist $V(I)$ definierbar.

Im folgenden sind alle Ringe kommutativ und mit 1.

Definition 5.10.4 Ein Ring R heißt **Noethersch**, wenn keine unendliche aufsteigende Kette von Idealen $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$ in R existiert.

Lemma 5.10.5 In einem noetherschen Ring ist jedes Ideal I endlich erzeugt, d. h. es existieren (endlich viele) $a_1, \dots, a_n \in R$ so dass $I = (a_1, \dots, a_n)$ ist.

Satz 5.10.6 Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch $R[x]$ noethersch. Insbesondere ist $k[\underline{x}]$ noethersch.

Definition 5.10.7 Sei $I \subset R$ ein Ideal.

- (a) I ist ein **Primideal**, $I \neq R$ ist und wenn für alle $g, h \in R$ gilt: Aus $g \cdot h \in I$ folgt $g \in I$ oder $h \in I$.
- (b) I ist ein **Radikalideal**, wenn für alle $g \in R$ und $n \geq 2$ gilt: Aus $g^n \in I$ folgt $g \in I$.

Bemerkung 5.10.8 Jedes Primideal ist insbesondere ein Radikalideal.

Definition 5.10.9 Eine nicht-leere algebraische Menge $X \subset K^n$ heißt **irreduzibel** (über k), wenn für alle über k algebraischen Teilmengen $Y_1, Y_2 \subset X$ gilt: Falls $Y_1 \cup Y_2 = X$, so ist schon $Y_1 = X$ oder $Y_2 = X$.

Lemma 5.10.10 Sei $X \subset K^n$ eine algebraische Menge. Dann ist $I(X)$ ein Radikal-Ideal, und $I(X)$ ist prim genau dann, wenn X irreduzibel ist.

Satz 5.10.11 (Hilberts Nullstellensatz, Version 2) Ist $I \subsetneq K[\underline{x}]$ ein Ideal und ist $g \in K[\underline{x}]$ ein Polynom, so dass $g^n \notin I$ ist für alle $n \geq 1$, so ist $V(I \cup \{g\}) \subsetneq V(I)$.

Korollar 5.10.12 Die Abbildung

$$\{\text{Radikal-Ideale in } k[\underline{x}]\} \rightarrow \{\text{algebraische Teilmengen von } K^n\}, I \mapsto V(I)$$

ist eine Bijektion; die dazu inverse Abbildung ist $V \mapsto I(V)$.

Satz 5.10.13 Ist $p \in S_n(k)$ ein Typ, so ist $I(p) := \{f \in k[\underline{x}] \mid (f(\underline{x}) = 0) \in p\}$ ein Primideal. Diese Zuordnung definiert eine Bijektion zwischen der Menge aller n -Typen über k und der Menge der Primideale in $k[\underline{x}]$.

Korollar 5.10.14 Ist $\underline{a} \in K^n$, so ist der Zariski-Abschluss von $\{\underline{a}\}$ irreduzibel, und jedes irreduzible $X \subset K^n$ enthält ein \underline{a} , so dass X genau der Zariski-Abschluss von $\{\underline{a}\}$ ist. (Ein solches \underline{a} nennt man ein (über k) **generisches Element** von X .)

Satz 5.10.15 Seien $X \subsetneq Y \subset K^n$ algebraische Mengen mit Y irreduzibel. Dann ist $\text{rk } X < \text{rk } Y$.

Korollar 5.10.16 Für algebraische Mengen $X \subset K^n$ sind äquivalent:

- (a) X lässt sich als Vereinigung von algebraischen Mengen $Y_1, Y_2 \subsetneq X$ schreiben mit $\text{rk } Y_1 = \text{rk } Y_2 = \text{rk } X$ und $\text{rk}(Y_1 \cap Y_2) < \text{rk } X$.
- (b) X lässt sich nicht als disjunkte Vereinigung von k -definierbaren Mengen $Y_1, Y_2 \subset X$ schreiben mit $\text{rk } Y_1 = \text{rk } Y_2 = \text{rk } X$.

Satz 5.10.17 Jede algebraische Menge $X \subset K^n$ lässt sich als Vereinigung von endlich vielen irreduziblen algebraischen Mengen Y_1, \dots, Y_k schreiben mit $Y_i \not\subset Y_j$ für alle $i \neq j$, und diese Y_i sind durch X eindeutig festgelegt (bis auf Reihenfolge).

Definition 5.10.18 Die Y_i aus Satz 5.10.17 nennt man die **irreduziblen Komponenten** von X .

Korollar 5.10.19 Sei $X \subset K^n$ k -definierbar und sei Y der Zariski-Abschluss von X . Dann ist $\text{rk}(Y \setminus X) < \text{rk}(X)$.

5.11 Pseudo-endliche Körper

Satz 5.11.1 Für jede Primpotenz $q := p^r$ existiert (bis auf Isomorphie) genau ein Körper mit q Elementen. Ist $n \in \mathbb{N}$ keine Primpotenz, so existiert kein Körper mit n Elementen.

Definition 5.11.2 Ist q eine Primpotenz, so wird der Körper mit q Elementen mit \mathbb{F}_q bezeichnet.

Bemerkung 5.11.3 Ist q eine Potenz von p , so ist $\mathbb{F}_q = \{a \in \mathbb{F}_p^{\text{alg}} \mid a^q = a\}$.

Korollar 5.11.4 Jeder endliche Körper \mathbb{F}_q besitzt für jedes $n \geq 1$ (bis auf Isomorphie) genau eine Körpererweiterung \mathbb{F}_q vom Grad n , nämlich \mathbb{F}_{q^n} . Die Körpererweiterung $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q$ ist Galoissch, und die Galois-Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und wird von $\sigma: a \mapsto a^q$ erzeugt.

Definition 5.11.5 Den Automorphismus $\text{Frob}_p: \mathbb{F}_p^{\text{alg}} \rightarrow \mathbb{F}_p^{\text{alg}}, a \mapsto a^p$ nennt man **Frobenius-Automorphismus**.

Definition 5.11.6 Wir arbeiten in der Sprache der Ringe. Wir definieren die Theorie der pseudo-endlichen Körper als $\text{PSF} := \text{INF} \cup \bigcap_q \text{Th}(\mathbb{F}_q)$, wobei q über alle Primpotenzen läuft. Ein **pseudo-endlicher Körper** ist ein Modell von PSF.

Bemerkung 5.11.7 Eine L_{ring} -Aussage ϕ gilt in allen pseudo-endlichen Körpern genau dann, wenn sie in allen hinreichend großen endlichen Körpern gilt.

Satz 5.11.8 Sei F ein pseudo-endlicher Körper. Für jedes $n \geq 1$ besitzt F (bis auf Isomorphie) genau eine Körpererweiterung vom Grad n .

Definition 5.11.9 Ein Körper K heißt **perfekt**, wenn

- $\text{char } K = 0$ ist, oder
- $\text{char } K = p$ ist und jedes Element von K eine p -te Wurzel besitzt.

Satz 5.11.10 Ein Körper K ist perfekt genau dann, wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist. Außerdem gilt: Jede separable Körpererweiterung L/K wird von einem Element erzeugt.

Satz 5.11.11 (Satz vom primitiven Element) Ist L/K eine separable Körpererweiterung, so existiert ein $a \in L$, so dass $L = K(a)$ ist.

Satz 5.11.12 Alle endlichen Körper sind perfekt.

Korollar 5.11.13 Alle pseudo-endlichen Körper sind perfekt.

Definition 5.11.14 Ein Körper F heißt **pseudo-algebraisch-abgeschlossen** (kurz **PAC**), wenn für jede über F algebraische Menge $V \subset (F^{\text{alg}})^n$, die über F^{alg} irreduzibel ist, gilt: $V \cap F^n \neq \emptyset$.

Satz 5.11.15 Pseudo-endliche Körper sind pseudo-algebraisch-abgeschlossen.

Satz 5.11.16 Ein Körper F ist pseudo-endlich genau dann, wenn folgendes gilt:

- (a) Für jedes $n \geq 1$ besitzt F (bis auf Isomorphie) genau eine Körpererweiterung vom Grad n .
- (b) F ist perfekt.
- (c) F ist pseudo-algebraisch-abgeschlossen.

Satz 5.11.17 (Lang-Weil) Für jedes $n \geq 1$ und jedes $d \geq 1$ existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass folgendes für jedes Primpotenz q gilt: Ist $V \subset (\mathbb{F}_q^{\text{alg}})^n$ eine über \mathbb{F}_q algebraische Menge, die durch (beliebig viele) Polynome vom Grad höchstens d definiert wird, und ist V irreduzibel über $\mathbb{F}_q^{\text{alg}}$, so ist $||V \cap \mathbb{F}_q^n| - q^{\text{rk } V}| < Cq^{\text{rk } V - \frac{1}{2}}$.

Index

- A-definierbar, 22
- $I(Y)$, 31
- $L(A)$, 16
- $V(B)$, 31
- $V(I)$, 31
- \mathbb{F}_q , 33
- MD, 29
- MR, 28
- \perp , 5
- $\dot{=}$, 3
- \emptyset -definierbar, 22
- \equiv , 5, 6
- κ -stabil, 30
- κ^+ , 24
- \models , 4, 5
- ω , 10
- On, 14
- \prec , 17
- rk, 27
- \top , 5
- tp, 23
- \vdash , 7
- DLO, 18
- äquivalent, 23
- über, 25
- RCF, 20
- VR_K , 19
- ZFC, 9
- abgeschlossen
 - Zariski-abgeschlossen, 31
- Abschluss
 - reeller, 20
 - Zariski-Abschluss, 31
- algebraisch, 24, 31
- algebraisch unabhängig, 24
- algebraische Abschluss, 24
- algebraische Menge, 31
- angeordneter Körper, 20
- angeordneter Ring, 20
- äquivalent, 5, 6
- äquivalent modulo T , 6
- atomar, 17
- Aussage, 4
- Aussage erster Stufe, 4
- aussagenlogische Tautologie, 6
- Austauschenschaft, 24
- Basis, 25
- boolesche Kombination, 17
- Code, 12
- definierbar, 22
- definierbare Abschluss, 22
- Dimension, 25
- disjunktive Normalform, 18
- Einbettung, 3
- Element
 - generisches, 29
- elementar, 25
- elementar äquivalent, 6
- elementare Einbettung, 17
- elementare Erweiterung, 17
- elementare Unterstruktur, 17
- endlich, 11
- endlich erfüllbar, 17
- endlich erzeugt, 18
- Endlichkeitslemma, 27
- erfüllbar, 17
 - endlich, 17
- erfüllen, 4
- erster gödelscher Unvollständigkeitssatz,
 - 13
- Erweiterung, 3
- erzeugt, 18
- erzeugte Unterstruktur, 18
- folgt, 5
- formal konsistent, 7
- formal vollständig, 8
- formaler Beweis, 7
- Formel, 3
- Formel erster Stufe, 3
- freie Variable, 4
- Frobenius-Automorphismus, 33
- Funktional, 14
- Funktionssymbol, 2
- gödelscher Unvollständigkeitssatz
 - erster, 13
 - zweiter, 13
- Gödelscher Vollständigkeitssatz, 7
 - Version 1, 7
 - Version 2, 7

generischer Typ, 29
 generisches Element, 29, 32
 gilt, 4
 Gleichheitsaxiome, 7
 Grothendieck-Universum, 16
 Grundmenge, 2

 Henkin-Theorie, 8
 Hilbertkalkül, 7
 Hilberts Nullstellensatz, 32
 Homomorphismus, 3

 Induktion, 11
 transfinite, 14
 inkonsistent, 5
 interdefinierbar, 23
 Interpretation, 2
 irreduzibel, 32
 irreduzible Komponente, 32
 isoliert, 24
 isomorph, 3
 Isomorphismus, 3

 Körper
 pseudo-endlicher, 33
 Kardinalität, 11, 15
 Kardinalzahl, 15
 Klasse, 8
 kofinal, 16
 Kompaktheitssatz, 17
 Komponente
 irreduzible, 32
 konsistent, 5
 Konstantensymbol, 2
 Kontinuumshypothese, 15

 Lang-Weil
 Satz, 34
 Lemma
 Endlichkeitslemma, 27
 Limes-Ordinalzahl, 14

 Menge, 8
 algebraische, 31
 Modell, 5
 Modus Ponens, 7
 Monotonie-Satz, 27
 Morley-Grad, 29
 Morley-Rang, 28

 Nachfolger-Ordinalzahl, 14

 naive Mengenlehre, 8
 natürliche Zahl, 10
 Noethersch, 31
 Nullstellensatz, 32

 o-Minimal, 26
 Oberstruktur, 3
 Ordinalzahl, 14

 PAC, 33
 Parameter-Menge, 22
 partieller Typ, 23
 perfekt, 33
 Primideal, 32
 primitives Element
 Satz vom, 33
 pseudo-algebraisch-abgeschlossen, 33
 pseudo-endlicher Körper, 33

 Quantoren-Elimination, 18
 Quantorenaxiome, 7
 quantorenfrei, 17

 Radikalideal, 32
 Rang, 27
 realisiert, 17
 Redukt, 23
 reell abgeschlossener Körper, 20
 reeller Abschluss, 20
 Rekursionssatz, 11
 für Ordinalzahlen, 14
 relationale Sprache, 23
 Relationssymbol, 2
 relative Dimension, 25

 saturiert, 23
 Satz
 erster gödelscher Unvollständigkeits-
 satz, 13
 Gödelscher Vollständigkeitssatz, 7
 Hilberts Nullstellensatz, 32
 Kompaktheitssatz, 17
 Monotonie, 27
 vom primitiven Element, 33
 von Löwenheim-Skolem, 17
 von Lang-Weil, 34
 zweiter gödelscher Unvollständig-
 keitssatz, 13
 Signatur, 2
 Sprache, 2
 relationale, 23

Sprache der Mengenlehre, 8
 stabil, 30
 stark unerreichbar, 16
 streng minimal, 26
 Struktur, 2

 Tautologie, 6
 Term, 3
 Theorie, 5

- der abelschen Gruppen, 5
- der algebraisch abgeschlossenen Körper, 5
- der Gruppen, 5
- der Körper, 5
- der Ringe, 5
- der Vektorräume, 5

 Theorie der Mengenlehre, 9
 Theorie von \mathcal{M} , 6
 Topologie

- Zariski-Topologie, 31

 total transzendent, 30
 transfinit Induktion, 14
 Transzendenzbasis, 25
 Transzendenzgrad, 25
 Typ, 23

- generischer, 29
- partieller, 23
- vollständiger, 23

 unabhängig

- algebraisch, 24

 Unterstruktur, 3

 Variable

- freie, 4

 verallgemeinerte Kontinuumshypothese, 15
 vollständig, 6
 vollständiger Typ, 23

 wahr, 4
 wohlgeordnet, 14
 Wohlordnung, 14

 Zariski-abgeschlossen, 31
 Zariski-Topologie, 31
 zweiter gödelscher Unvollständigkeitsatz, 13