1	2	3	4	5	Σ

....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 1

Abgabe am 18.10.2018 in der Vorlesung

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf diesem Aufgabenblatt können einfache Abkürzungen für Formeln verwendet werden, z. B. $\forall x\colon \phi(x)$ für $\neg\exists x\colon \neg\phi(x)$ und $\phi \vee \psi$ für $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei $L = \{c, R\}$ eine Sprache, wobei c ein Konstantensymbol und R ein einstelliges Relationssymbol ist. Wie viele verschiedene L-Strukturen mit der Grundmenge $\{1, 2, 3\}$ gibt es? Wie viele Isomorphieklassen bilden diese drei-elementigen Strukturen?

Aufgabe 2 (2 Punkte):

(a) Ist
$$\phi(x) := \exists n \in \mathbb{N}\colon (x \doteq 1 \vee x \doteq 1 + 1 \vee \cdots \vee x \doteq \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n})$$
eine L_{ring}-Formel?

(b) Ist
$$\phi_n(x) := x \doteq 1 \vee x \doteq 1 + 1 \vee \cdots \vee x \doteq \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$$
für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine L_{ring}-Formel?

Begründen Sie ganz kurz.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Geben Sie eine L_{ring}-Formel $\phi(x, y)$ an, so dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{R} \models \phi(a, b)$ genau dann, wenn $a \leq b$ ist.

(b) Geben Sie eine L_{ring}-Aussage ϕ an, so dass $\mathbb{R} \models \phi$ aber $\mathbb{C} \not\models \phi$ gilt. (Zur Erinnerung: $L_{\text{ring}} = \{0, +, -, 1, \cdot\}$.)

(c) Sei $L = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Geben Sie eine L-Aussage ϕ an, so dass für $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}})$ gilt: $M \models \phi$ genau dann, wenn f surjektiv aber nicht injektiv ist.

(d) Gibt es eine Sprache L und eine L-Aussage ϕ, so dass es L-Strukturen $\mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models \phi$, aber so dass es keine *endlichen* $\mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models \phi$? ($\mathcal{M}$ heißt endlich, wenn die Grundmenge von $\mathcal{M}$ eine endliche Menge ist.)

Aufgabe 4 (2+2 Punkte):

Sei $L = \{\sim\}$, wobei $\sim$ ein zweistelliges Relationssymbol ist.

(a) Geben Sie eine L-Aussage $\phi_{\text{Äq}}$ an, so dass für alle L-Strukturen $\mathcal{M} = (M, \sim^{\mathcal{M}})$ gilt:
$\mathcal{M} \models \phi_{\text{Äq}}$ genau dann, wenn $\sim^{\mathcal{M}}$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ L-Strukturen, so dass $\sim^{\mathcal{M}}$ und $\sim^{\mathcal{N}}$ Äquivalenzrelationen sind und sei $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein bijektiver L-Homomorphismus. Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ dann automatisch isomorph? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 5 (1+3 Punkte):

Sei $L_{\text{mgrp}} = \{1, \cdot, {}^{-1}\}$ wie in der Vorlesung die Sprache der (multiplikativ geschriebenen) Gruppen und sei $L = \{\cdot, {}^{-1}\} \subset L_{\text{mgrp}}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine L-Formel $\phi_1(x)$, so dass für jede Gruppe G und jedes $a \in G$ gilt: $G \models \phi_1(a)$ genau dann, wenn $a = 1$.

(b) Zu jeder L_{mgrp}-Formel $\phi(\underline{x})$ gibt es eine L-Formel $\psi(\underline{x})$, so dass für alle Gruppen G und für alle $\underline{a} \in G^n$ gilt: $G \models \phi(\underline{a}) \iff G \models \psi(\underline{a})$.
Hinweis: Benutzen Sie die Formel $\phi_1(x)$ aus (a).