....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 10

Abgabe am 10.1.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+2+1 Punkte):

Sei V_α wie in Satz 3.8.6 definiert (für $\alpha \in \mathrm{On}$). Wir schreiben V für die Klasse $V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$. („$x \in V$“ bedeutet also: „$\exists\alpha\colon \alpha$ ist Ordinalzahl $\wedge x \in V_\alpha$“) Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass V die Klasse aller Mengen ist. Wir nehmen also an, x sei eine Menge, die nicht in V liegt.

Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt:

(a) Es existiert ein $y \in x$ mit $y \notin V$.
Hinweis: Zeigen Sie: Aus $x \subset V$ folgt, dass es schon ein α gibt mit $x \subset V_\alpha$.
Hinweis zum Hinweis: Das Supremum einer Menge von Ordinalzahlen existiert immer.

(b) Es existiert eine Funktion f auf ω, die folgende Eigenschaften hat:
$f(n) \notin V$ für alle $n \in \omega$; $f(0) = x$; $f(n+1) \in f(n)$ für alle $n \in \omega$.

(c) Führen Sie dies zum Widerspruch, indem Sie das Fundierungsaxiom auf im f anwenden.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Im Beweis von Satz 3.8.6 wurde in der Vorlesung ein Schritt ausgelassen:

Gegeben war ein stark unerreichbare Kardinalzahl κ und eine Limes-Ordinalzahl $\lambda < \kappa$. Wir hatten (induktiv) angenommen, dass wir für alle $\beta < \lambda$ bereits wissen: $|V_\beta| < \kappa$. Zu zeigen war dann: $|V_\lambda| < \kappa$.

Führen Sie diesen Beweisschritt aus.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Seien $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ L-Strukturen.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ ist eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$ genau dann, wenn jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ gilt:

$$\{\underline{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})\} = \{\underline{a} \in M^n \mid \mathcal{N} \models \phi(\underline{a})\}. \qquad (+)$$

(b) Geben Sie Beispiele an, die zeigen: Ist $\mathcal{M} \not\prec \mathcal{N}$, so muss bei (+) keine der beiden Inklusionen gelten.

Aufgabe 4 (1+2 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Sind $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}''$ L-Strukturen mit $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}' \prec \mathcal{M}''$, so gilt auch $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}''$

(b) Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $\mathcal{M}_i$ (für $i \in I$) L-Strukturen, die eine Kette bezüglich elementarer Einbettung bilden (also $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ oder $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_i$ für alle $i, j \in I$), so ist die Vereinigung $\mathcal{M} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}_i$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte):

(a) Sei L eine endliche oder abzählbare Sprache und sei T eine konsistente L-Theorie, die keine endlichen Modelle besitzt. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 (i) T ist vollständig.
 (ii) Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ zwei abzählbare Modelle von T (d. h. mit $|M| = |M'| = \aleph_0$), so ist $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$.
Hinweis: Für eine Richtung ist der Satz von Löwenheim-Skolem nützlich.

(b) Sei nun L die leere Sprache, und sei T_∞ die L-Theorie, die besagt, dass die Struktur unendlich ist. Zeigen Sie, dass T_∞ vollständig ist.
Hinweis: Benutzen Sie (a).