....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 11

Abgabe am 17.1.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf dem gesamten Blatt sei L eine Sprache.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei $\phi(x)$ eine L-Formel. Wir nehmen an, dass die Menge $\{a \in M \mid \mathcal{M} \models \phi(a)\}$ unendlich ist. Zeigen Sie, dass es für jede Kardinalzahl κ eine elementare Erweiterung $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ gibt, so dass die Menge $\{a \in N \mid \mathcal{N} \models \phi(a)\}$ mindestens Kardinalität κ hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Seien $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ elementar äquivalente L-Strukturen. Zeigen Sie: Eine Menge von L-Formeln (alle in den gleichen Variablen $\underline{x}$) ist endlich erfüllbar in $\mathcal{M}_1$ genau dann, wenn sie in $\mathcal{M}_2$ endlich erfüllbar ist.

(b) Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur. Zeigen Sie, dass eine elementare Erweiterung $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ existiert, so dass jede Menge Σ von in $\mathcal{N}$ endlich erfüllbaren L-Formeln schon in $\mathcal{N}$ realisiert ist.
Hinweis: Satz 4.1.12 aus der Vorlesung und Aufgabe 4 (b) von Blatt 10 sind nützlich.
Noch ein Hinweis: Nach (a) können Sie „Σ in $\mathcal{N}$ endlich erfüllbar“ durch „Σ in $\mathcal{M}$ endlich erfüllbar“ ersetzen.

Aufgabe 3 (1+3+2 Punkte):

Sei X die Menge aller vollständigen L-Theorien. Wir nennen eine Teilmenge von X „offen“, wenn sie die Form $U_{T_0} := \{T \in X \mid T_0 \cup T \models \bot\}$ hat, wobei T_0 eine L-Theorie (die weder vollständig noch konsistent sein muss) ist.

Zeigen Sie:

(a) Für $T \in X$ und T_0 wie oben gilt: $T \in U_{T_0}$ genau dann, wenn ein $\phi \in T_0$ existiert mit $T \not\models \phi$.

(b) Zeigen Sie, dass X ein topologischer Raum ist. (Zur Erinnerung: Zu zeigen ist: (i) $\emptyset$ und X sind offen, (ii) Schnitte von zwei offenen Mengen sind offen; (iii) Vereinigungen von beliebig vielen offenen Mengen sind offen.)

(c) Zeigen Sie (mit Hilfe des Kompaktheitssatzes 4.1.10 aus der Vorlesung), dass X kompakt ist, d. h. dass jede Überdeckung von X durch offene Mengen schon eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{N}$ als Struktur in der Sprache $L = \{0, s\}$, wobei s die Nachfolger-Funktion ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}_L(\mathbb{N})$ Quantoren eliminiert.

Hinweis: Sie können z. B. ähnlich wie in Beispiel 4.2.8 vorgehen:

(a) Begründen Sie zunächst, dass jede atomare Formel $\phi(\underline{x}, y)$ durch eine Formel der Form $y = x_i + n$ oder $y = n$ ersetzt werden kann (für ein geeignetes $n \in \mathbb{Z}$).

(b) Machen Sie eine Fallunterscheidung danach, ob (mindestens) eine Gleichung oder ob nur Ungleichungen vorkommen. Kann man (wie bei DLO), wenn die Gleichung „$y = x_i + n$“ vorkommt, überall einfach y durch $x_i + n$ ersetzen und „$\exists y$“ weglassen oder ist noch etwas weiteres zu beachten?