....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 12 (letztes Blatt)

Abgabe am 24.1.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als Struktur in der Sprache $L_{\text{agrp}} = \{+, -, 0\}$ und setzen $T := \text{Th}(\mathbb{Z})$.

(a) Geben Sie eine L_{agrp}-Formel an, die modulo T nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Bedingung aus Satz 4.2.12 (für T) verletzt ist. In Ihrem Beispiel soll $\mathcal{M} = \mathcal{M}' = \mathbb{Z}$ sein.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei L eine Sprache und $\mathcal{M}_0$ eine L-Struktur.

Möchte man prüfen, ob die Theorie $T = \text{Th}(\mathcal{M}_0)$ Quantorenelimination hat, so reicht es *nicht* aus, die Bedingung aus Satz 4.2.12 für $\mathcal{M} = \mathcal{M}' = \mathcal{M}_0$ zu prüfen. Geben Sie ein Beispiel an, an dem man dies sieht.

Hinweis: Wie sieht das $\mathcal{A}$ aus Satz 4.2.12 aus, wenn L Konstanten für alle Elemente von $\mathcal{M}_0$ enthält?

Aufgabe 3 (2+2+1+2 Punkte):

Wir arbeiten in der Gruppensprache $L_{\text{agrp}} = \{+, -, 0\}$. Eine abelsche Gruppe G heißt *torsionsfrei*, wenn jedes $a \in G\backslash\{0\}$ Ordnung ∞ hat. Eine abelsche Gruppe G heißt *divisibel*, wenn für jedes $a \in G$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ein $b \in G$ existiert mit $nb = a$.

(a) Zeigen Sie: Ist G eine divisible und torsionsfreie abelsche Gruppe (im folgenden abgekürzt mit DTAG), so ist das b aus der Definition von „divisibel“ eindeutig durch a und n festgelegt.
Im folgenden bezeichnen wir dieses Element b mit $\frac{a}{n}$.

(b) Ist G eine DTAG und $A \subset G$ eine beliebige Untergruppe, so ist die *divisible Hülle von A in G* definiert durch $A^{\text{div}} := \{\frac{a}{n} \mid a \in A, n \geq 1\}$.
Zeigen Sie: Sind G_1 und G_2 DTAGs, sind $A_1 \subset G_1$, $A_2 \subset G_2$ Untergruppen und ist $\alpha\colon A_1 \to A_2$ ein Isomorphismus, so lässt sich α zu einem Isomorphismus $A_1^{\text{div}} \to A_2^{\text{div}}$ der divisiblen Hüllen fortsetzen.

(c) Geben Sie eine L_{agrp}-Theorie an, deren Modelle genau die nicht-trivialen DTAGs sind; wir nennen diese Theorie auch DTAG.
(Sie brauchen die Theorie der abelschen Gruppen nicht nochmal aufzuschreiben. Die Frage ist vor allem, wie man torsionsfrei und divisibel ausdrückt.)

(d) Zeigen Sie, dass DTAG Quantoren-Elimination hat.
Hinweis: Benutzen Sie Korollar 4.2.14 auf ähnliche Weise wie in den Beispielen aus der Vorlesung, unter Verwendung von (b).

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $\phi(x)$ eine L_{ring}-Formel und K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist die Menge $X := \{a \in K \mid K \models \phi(x)\}$ entweder endlich oder ko-endlich. (X heißt ko-endlich, wenn $K \setminus X$ endlich ist.)

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, seien $f_1, \dots, f_k \in K[\underline{x}]$ Polynome und sei $L \supset K$ ein beliebiger Oberkörper. Wir betrachten die Menge $X := \{\underline{a} \in L^n \mid f_1(\underline{a}) = \dots = f_k(\underline{a}) = 0\}$.

Zeigen Sie: Ist X endlich, so ist bereits $X \subset K^n$.

Anmerkung: Am Montag wird in der Vorlesung gezeigt, dass ACF_p vollständig ist für jedes p (prim oder 0); dies dürfen Sie verwenden.

Und noch ein Hinweis: Ersetzen Sie L erst mal durch seinen algebraischen Abschluss.