Name		Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 2
Matr-Nr.	Gruppe	Abgabe am 25.10.2018 in der Vorlesung

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

$T \models \phi$ und $T \cup \{\phi\} \models \psi$ impliziert $T \models \psi$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Für eine L-Theorie T sind äquivalent:

(a) T ist vollständig.

(b) Alle Modelle von T sind elementar äquivalent.

(c) Es gibt eine L-Struktur $\mathcal{M}$, so dass T äquivalent zu $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Sei $L = \{R\}$, wobei R ein einstelliges Relationssymbol ist und seien $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$ und $\mathcal{N} = (N, R^{\mathcal{N}})$ endliche L-Strukturen (d. h. M und N sind endliche Mengen). Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind elementar äquivalent genau dann, wenn $\#M = \#N$ und $\#R^{\mathcal{M}} = \#R^{\mathcal{N}}$ gilt.

Hinweis: Für „$\Leftarrow$“ können Sie ausnutzen, dass man einen Isomorphismus $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ erhält.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Geben Sie eine L_{ring}-Aussage ϕ an so dass für Körper K gilt: $K \models \phi$ gdw. jedes normierte Polynom in $K[X]$ vom Grad 3 hat mindestens eine Nullstelle in K.

(b) Geben Sie eine Menge T von L_{ring}-Aussagen an, so dass für Körper K gilt: $K \models T$ genau dann, wenn K algebraisch abgeschlossen ist.
Anmerkung: Sie können ohne Beweis verwenden: K ist algebraisch abgeschlossen genau dann, wenn jedes (normierte) nicht-konstante Polynom in $K[X]$ mindestens eine Nullstelle in K hat.

Aufgabe 5 (1+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi = P_1 \to ((P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_2))$ eine aussagenlogische Tautologie ist, indem Sie alle Kombinationen von $\top$ und $\bot$ für die aussagenlogischen Variablen P_1 und P_2 einsetzen.

(b) Zeigen Sie: Zu jeder Teilmenge $A \subset \{\bot, \top\}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) gibt es eine aussagenlogische Formel Φ in $P_1, \dots, P_m$ so dass für $(\phi_1, \dots, \phi_m) \in \{\bot, \top\}^m$ gilt: $\Phi[\phi_1, \dots, \phi_m]$ ist äquivalent zu $\top$ genau dann, wenn $(\phi_1, \dots, \phi_m) \in A$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass A ein-elementig ist und überlegen Sie sich dann, wie man aus einer Formel für A und einer Formel für A' eine für $A \cup A'$ erhalten kann.
(Sie können es auch zunächst an konkreten Beispielen versuchen, z. B. $A = \{(\top, \top)\}$ und $A = \{(\top, \bot)\}$.)