....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 3

Abgabe am Mi, 31.10.2018 in der Übung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie ohne Verwendung der gödelschen Vollständigkeitssätze, dass für L-Theorien T und für L-Aussagen ϕ, ψ gilt: $T \vdash \phi \to \psi$ genau dann, wenn $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

In der Vorlesung wurde das Axiom
(q1) $\forall \underline{x}\colon \big(\forall y\colon (\phi(\underline{x}) \to \psi(\underline{x}, y)) \quad \leftrightarrow \quad (\phi(\underline{x}) \to \forall y\colon \psi(\underline{x}, y))\big)$
verwendet. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass statt dessen schon das Axiom
(q1$\to$) $\forall \underline{x}\colon \big(\forall y\colon (\phi(\underline{x}) \to \psi(\underline{x}, y)) \quad \to \quad (\phi(\underline{x}) \to \forall y\colon \psi(\underline{x}, y))\big)$
gereicht hätte. Um es übersichtlicher zu halten, sparen wir uns aber das „$\forall \underline{x}$", d. h.:

Geben Sie einen formalen Beweis von
(q1$\leftarrow$) $\big(\forall y\colon (\phi \to \psi(y)) \quad \leftarrow \quad (\phi \to \forall y\colon \psi(y))\big)$
an (ausgehend von der leeren Theorie), wobei statt (q1) nur (q1$\to$) verwendet werden soll.

Hier ist eine mögliche Anleitung:

- (q1$\leftarrow$) folgt aus den beiden folgenden Aussagen:
  (i) $\neg\phi \to \forall y\colon (\phi \to \psi(y))$ (Wenn ϕ falsch ist, ist die linke Seite von (q1$\leftarrow$) wahr.)
  (ii) $\forall y\colon \psi(y) \to \forall z\colon (\phi \to \psi(z))$ (Wenn $\forall y\colon \psi(y)$ wahr ist, ist die linke Seite von (q1$\leftarrow$) wahr.)
- Um (ii) zu beweisen, kann man als Zwischenschritt das Folgende beweisen:
  (iii) $\forall z\colon (\forall y\colon \psi(y) \to (\phi \to \psi(z)))$.
- Der Beweis von (iii) verwendet
  (iv) $\forall z\colon (\forall y\colon \psi(y) \to \psi(z))$,
  was man mit (q2) erhält.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $L := L_{\text{ring}} \cup \{<\}$ (wobei wie üblich $<$ ein zweistelliges Relationssymbol ist). In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es eine L-Struktur R gibt, die elementar äquivalent zu $\mathbb{R}$ aber nicht isomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Dabei darf der gödelsche Vollständigkeitssatz (2.3.1 oder 2.3.4) verwerwendet werden.

(a) Sei $L' := L \cup \{c\}$, wobei c ein neues Konstantensymbol ist. Sei $T := \operatorname{Th}(\mathbb{R}) \cup \{c > \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass T konsistent ist.
Hinweis: Benutzen Sie Lemma 2.3.5.

(b) Sei R ein Modell von T, das wir jetzt aber als L-Struktur auffassen. Zeigen Sie, dass R ist elementar äquivalent zu $\mathbb{R}$ aber nicht isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4 (2+2+1 Punkte):

Wir versuchen, eine L_{ring}-Theorie T zu konstruieren, deren Modelle genau die endlichen Körper sind. Dazu setzen wir

$$T := \{\phi \mid \phi \text{ gilt in allen endlichen Körpern}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Versuch missglückt ist: T besitzt auch unendliche Körper als Modelle.
Anmerkung: Ein unendliches Modell von T nennt man einen pseudo-endlichen Körper.
Hinweis: Zeigen Sie unter Verwendung von Lemma 2.3.5, dass die Theorie

$$T' := T \cup \{\text{„Es gibt mindestens } n \text{ verschiedene Elemente"} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

konsistent ist.

(b) Zeigen Sie: Ist K ein pseudo-endlicher Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$, so gibt es (mindestens) ein Element $a \in K$, das kein Quadrat ist (d. h. so dass es kein $b \in K$ gibt mit $b^2 = a$).
Hinweis: Finden Sie heraus, ob die Quadrier-Abbildung auf endlichen Körpern der Charakteristik $\neq 2$ injektiv und/oder surjektiv ist.

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ ist nicht pseudo-endlich.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModTh_WS18/