....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 4

Abgabe am 15.11.2018 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

In den folgenden Formeln wurden einige abkürzende Notationen aus der Mengenlehre verwendet. Geben Sie die L_{Me}-Formel, an, die damit wirklich gemeint ist; Abkürzungen aus Kapitel 1 der Vorlesungen dürfen aber verwendet werden.

(a) $\phi_1(y, z) = \forall x \subset y \colon x \dot{\notin} z$

(b) $\phi_2(x, y, z) = \{\{u\} \mid u \in x\} \doteq \{w \mid w \cap y \dot{\in} z\}$

(Anmerkung: Das, was bei (b) steht, sind möglicherweise keine Mengen, sondern Klassen. Trotzdem lässt sich da, was da steht, als L_{Me}-Formel ausdrücken.)

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Um innerhalb von ZFC mit Relationen arbeiten zu können, fassen wir – wie schon am Anfang der Vorlesung – zweistellige Relationen auf einer Menge x als Teilmengen von $x \times x$ auf. (Die Klasse aller zweistelligen Relationen auf x ist also einfach $\mathcal{P}(x \times x)$, was nach dem Potenzmengenaxiom und Lemma 3.1.18 eine Menge ist.)

Zeigen Sie innerhalb von ZFC:

(a) Ist x eine Menge, so ist die Klasse aller Äquivalenzrelationen auf x eine Menge.

(b) Ist x eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf x und $y \in x$, so ist die Äquivalenzklasse von y eine Menge.[1]

(c) Ist x eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf x, so ist die Klasse $x/\!\sim$ aller Äquivalenzklassen eine Menge.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Um innerhalb von ZFC mit Funktionen arbeiten zu können, identifizieren wir eine Funktion f von x nach y (wobei x und y Mengen sind) mit ihrem Graph $\{(u, f(u)) \in x \times y\}$. Formal definieren wir also: Eine Funktion von einer Menge x in eine Menge y ist eine Teilmenge f von $x \times y$, so dass für jedes $u \in x$ genau ein $v \in y$ existiert mit $(u, v) \in f$. (Obwohl wir f formal als Menge definieren, verwenden wir noch die üblichen Notationen wie z. B. $f(a)$ für $a \in x$.)

Zeigen Sie in ZFC, für Mengen x und y:

(a) Die Klasse $\mathrm{Abb}(x, y)$ aller Funktionen von x nach y ist eine Menge.

(b) Sind $x' \subset x$ und $y' \subset y$ Mengen, so sind auch die Bildmenge $f(x')$ und die Urbildmenge $f^{-1}(y')$ tatsächlich Mengen.

(c) $\mathrm{id}_x \in \mathrm{Abb}(x, x)$.

(d) Ist z eine weitere Menge und sind $f \in \mathrm{Abb}(x, y)$ und $g \in \mathrm{Abb}(y, z)$, so ist $g \circ f$ auch eine Menge (und damit ein Element von $\mathrm{Abb}(x, z)$).

Aufgabe 4 (2+3+1+1 Punkte):

(In dieser Aufgabe arbeiten wir außerhalb von ZFC.) Sei $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\beta_{(a)} \colon \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}, \{a_1, \dots, a_k\} \mapsto 2^{a_1} + \dots + 2^{a_k}$ ist eine Bijektion.

(b) Sei nun $\beta \colon \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, aber nicht notwendigerweise die aus Teil (a).
Wir machen $\mathbb{N}$ zu einer L_{Me}-Struktur $\mathcal{N}$, indem wir definieren: $\mathcal{N} \models m \dot{\in} n$ genau dann, wenn $m \in \beta^{-1}(n)$.
Zeigen Sie, dass die Axiome Aussonderung, Potenzmenge, Ersetzung und Vereinigung in $\mathcal{N}$ erfüllt sind.
Anmerkung: Sie brauchen Ihre Beweise nicht ausführlich zu formulieren. Es reicht, sich zu überlegen, welche Klassen genau Mengen sind und dann kurz anzumerken, warum daraus offensichtlich folgt, dass die Axiome gelten.

(c) Zeigen Sie: Wenn man in (b) mit $\beta = \beta_{(a)}$ arbeitet, gibt es kein $x \in \mathcal{N}$, das sich selbst enthält (d. h. mit $\mathcal{N} \models x \dot{\in} x$).

(d) Geben Sie eine Bijektion $\beta_{(d)} \colon \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, so dass es, wenn man in (b) damit arbeitet, es ein $x \in \mathcal{N}$ gibt, das sich selbst enthält.
Hinweis: Sie brauchen $\beta_{(a)}$ nur leicht zu verändern.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModTh_WS18/

[1]Moral: Eigentlich sollte es also eher Äquivalenz*menge* statt Äquivalenzklasse heißen.