....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 6

Abgabe am 29.11.2018 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Alle Beweise auf diesem Blatt sollen in ZFC geführt werden:

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Die Fibonacci-Folge ist definiert durch: $f(0) = f(1) = 1$ und $f(n+2) = f(n)+f(n+1)$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Rekursionssatzes 3.2.10, dass dies eine Funktion ist; geben Sie insbesondere an, was genau das h ist, auf das der Satz angewandt wird.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Eine Menge x ist unendlich genau dann, wenn es eine Abbildung von x nach x, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

Dabei dürfen Sie von Lemma 3.2.9 nur die Implikation (d) $\Rightarrow$ (a) verwenden (die in der Vorlesung gezeigt wurde).

Aufgabe 3 (1+3+2+1 Punkte):

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $A := \bigcup_{n\in\omega} \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\dots\mathcal{P}}_{n \text{ mal}}(\emptyset)\dots))$ eine Menge ist.

(a) Zunächst wollen wir eine Funktion f auf ω definieren durch $f(0) := \emptyset$ und $f(n+1) := \mathcal{P}(f(n))$.
Warum können wir das nicht einfach mit dem Rekursionsatz 3.2.4 machen?

(b) Zeigen Sie: Für jedes m existiert genau eine Funktion f_m, die auf $\{0, \dots, m\}$ definiert ist und so dass gilt: $f_m(0) = \emptyset$ und, für $n < m$: $f_m(n+1) = \mathcal{P}(f_m(n))$.
Anmerkung: Sie können in ihrem Beweis etwas skizzenhaft sein; hauptsache, Sie sagen, was alles getan werden muss.

(c) Jetzt wollen wir mit Hilfe des Ersetzungsaxioms folgern, dass $\{f_m(m) \mid m \in \omega\}$ eine Menge ist. Erklären Sie, wieso dies funktioniert; geben Sie insbesondere die Formel $\phi(u, z, \underline{w})$ an, die im Ersetzungsaxiom benutzt wird.

(d) Folgern Sie, dass A eine Menge ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Im Folgenden sei $\beta(x)$ die L_{Me}-Formel, die ausdrückt: „$x = \ulcorner\phi\urcorner$ für eine L_{Me}-Aussage ϕ, und jedes Modell von ZFC ist auch Modell von ϕ."

Überlegen Sie sich, dass sich die folgenden Aussagen in der Sprache der Mengenlehre formulieren lassen (sie brauchen diese Überlegungen nicht aufzuschreiben) und skizzieren Sie bei *vier* der Aussagen kurz, wie Sie sich (in ZFC) beweisen lassen. (Wenn Sie mehr als vier Aussagen beweisen können, haben Sie vermutlich einen Fehler gemacht.)

Anmerkung: Die Beweise sind möglicherweise völlig trivial; es geht bei dieser Aufgabe vor allem darum, rauszufinden, was genau ausgesagt wird und welche Aussagen beweisbar sind.

(a) Wenn $0 = 1$ gilt, ist ZFC inkonsistent.

(b) Wenn $0 = 1$ gilt, ist ZFC konsistent.

(c) Wenn $\beta(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$ wahr ist, ist ZFC inkonsistent.

(d) Wenn ZFC $\models \beta(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$ wahr ist, ist ZFC inkonsistent.

(e) Wenn ZFC inkonsistent ist, gilt $0 = 1$.

(f) Für alle L_{Me}-Aussagen ϕ und ψ gilt: Wenn (ZFC $\models \phi$) $\Rightarrow$ (ZFC $\models \psi$) gilt, dann auch ZFC $\models (\phi \to \psi)$.

(g) Für alle L_{Me}-Aussagen ϕ und ψ gilt: Wenn ZFC $\models (\phi \to \psi)$ gilt, dann auch (ZFC $\models \phi$) $\Rightarrow$ (ZFC $\models \psi$).

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModTh_WS18/