....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 8

Abgabe am 13.12.2018 in der Vorlesung

1	2	3	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Ist M eine Menge von Ordinalzahlen, so ist auch $\alpha := \bigcup_{\beta \in M} \beta$ eine Ordinalzahl, und dieses α ist das Supremum von M. (Supremum heißt: α ist die kleinste Ordinalzahl, so dass $\alpha \geq \beta$ ist für alle $\beta \in M$.)

(b) Eine Ordinalzahl α ist genau dann die Vereinigung all ihrer Vorgänger, wenn sie keine Nachfolger-Ordinalzahl ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Seien $(M, <)$ und $(N, <)$ disjunkte wohlgeordnete Mengen. Zeigen Sie, dass auch die folgenden Mengen wohlgeordnet sind:

(a) $M \cup N$, wobei wir die Ordnungen auf M und N zu einer Ordnung auf der Vereinigung fortsetzen, indem wir $m < n$ für alle $m \in M$, $n \in N$ setzen.

(b) $M \times N$, wobei
$$(m, n) < (m', n') \iff n < n' \vee (n = n' \wedge m < m')$$

Aufgabe 3 (4+2+2+2 Punkte):

Für jede Ordinalzahl α definieren wir rekursiv Funktionale „$\beta \mapsto \alpha + \beta$“ und „$\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$“ durch:

$$\begin{array}{lll} \alpha + 0 := \alpha & \alpha \cdot 0 = 0 & \\ \alpha + s(\beta) := s(\alpha + \beta) & \alpha \cdot s(\beta) := \alpha \cdot \beta + \alpha & \\ \alpha + \lambda := \sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \lambda\} & \alpha \cdot \lambda := \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \lambda\} & \text{für } \lambda \text{ eine Limes-Ordinalzahl} \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) Sind M, N wie in Aufgabe 3, und ist M isomorph zu α und N isomorph zu β, so ist $M \cup N$ mit der Ordnung aus Aufgabe 3 (a) isomorph zu $\alpha + \beta$ und $M \times N$ mit der Ordnung aus Aufgabe 3 (b) isomorph zu $\alpha \cdot \beta$.

(b) Folgern Sie, dass diese Addition und diese Multiplikation assoziativ sind.

(c) Geben Sie Beispiele an, die zeigen, dass diese Addition und Multiplikation von Ordinalzahlen *nicht* kommutativ ist.

(d) Jede Ordinalzahl α lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $\alpha = \omega \cdot \beta + n$ schreiben, für ein $\beta \in \mathrm{On}$ und ein $n \in \omega$.