................................................
Name

.................................... .........
Matr-Nr. Gruppe

# Einführung in die Logik/ Modelltheorie – Blatt 9

Abgabe am 20.12.2018 in der Vorlesung

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

**Aufgabe 1 (2 Punkte):**

Bei Satz 3.6.11 wurde noch nicht gezeigt, dass jede wohlgeordnete Menge zu höchstens einer Ordinalzahl isomorph ist. Zeigen Sie also (z. B. per transfiniter Induktion über $\alpha$): Ist $f\colon \alpha \to \beta$ eine ordnungserhaltenden Bijektion zwischen zwei Ordinalzahlen, so ist schon $\alpha = \beta$.

**Aufgabe 2 (2 Punkte):**

Zeigen Sie Bemerkung 3.7.4: Für beliebige nicht-leere Mengen $M, N$ gilt: Es gibt eine surjektive Abbildung $M \to N$ genau dann, wenn $|N| \leq |M|$ ist.

**Aufgabe 3 (2+1 Punkte):**

$\aleph_\alpha$ ist doch sicher immer viel größer als $\alpha$ selbst, oder? Mal sehen...

(a) Sei $f\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ ein monotones Funktional, d. h. für $\alpha \leq \alpha'$ gelte $f(\alpha) \leq f(\alpha')$. Wir nehmen außerdem an, dass $f$ stetig ist, im Sinne von: $f(\lambda) = \sup\{f(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ für alle Limes-Ordinalzahlen $\lambda$. Es soll gezeigt werden, dass $f$ einen Fixpunkt besitzt, also dass ein $\beta \in \mathrm{On}$ existiert mit $f(\beta) = \beta$.
Genauer: Zeigen Sie, dass $\sup\{f^n(0) \mid n \in \omega\}$ ein Fixpunkt von $f$ ist. (Hierbei ist $f^n$ die $n$-fache Verknüpfung von $f$.)

(b) Folgern Sie: Es gibt ein $\alpha \in \mathrm{On}$ mit $\aleph_\alpha = \alpha$.

**Aufgabe 4 (2+1 Punkte):**

Sei $\alpha$ eine Ordinalzahl. Eine Teilmenge $M \subset \alpha$ heißt *kofinal* in $\alpha$, wenn es zu jedem $\beta \in \alpha$ ein $\beta' \in M$ gibt mit $\beta \leq \beta'$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $\beta$ eine Nachfolger-Ordinalzahl und ist $M \subset \aleph_\beta$ kofinal in $\aleph_\beta$, so ist $|M| = \aleph_\beta$.

(b) Ist $\beta$ eine Limes-Ordinalzahl, so gibt es eine kofinale Menge $M \subset \aleph_\beta$ in $\aleph_\beta$ mit $|M| = \beta$.

**Aufgabe 5 (2 Punkte):**

Zeigen Sie Lemma 3.7.11 aus der Vorlesung: Ist $\alpha \in \mathrm{On}$ und sind $(M_\beta)_{\beta<\alpha}$ beliebige Mengen, so ist $|\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta| \leq \max\{\aleph_0, |\alpha|, \sup_{\beta<\alpha} |M_\beta|\}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Kardinalität der linken Seite kleiner gleich der Kardinalität von $\kappa \times \alpha$ ist (falls $\kappa$ und/oder $\alpha$ unendlich sind).

**Aufgabe 6 (2+2 Punkte):**

Zeigen Sie:

(a) Sind $\kappa$, $\mu_1$, $\mu_2$ unendliche Kardinalzahlen, so gilt: $(\kappa^{\mu_1})^{\mu_2} = \kappa^{\max\{\mu_1,\mu_2\}}$.
Hinweis: Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathrm{Abb}(\mu_1 \times \mu_2, \kappa)$ und $\mathrm{Abb}(\mu_2, \mathrm{Abb}(\mu_1, \kappa))$ an.

(b) Sind $\kappa$ und $\mu$ unendliche Kardinalzahlen mit $\kappa \leq \mu$, so ist $\kappa^\mu = 2^\mu$.