Aufgabe 1 (3):

Sei $L = \{R\}$, wobei R ein zweistelliges Relationssymbol ist und $L' := L \cup \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir betrachten die L'-Theorie $T' := \{\forall x, y\colon (R(x, y) \leftrightarrow f(x) = y)\}$.

Geben Sie eine L-Aussage an, die modulo T' zur L'-Aussage

$$\forall x\colon f(f(f(x))) = x$$

äquivalent ist. (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

Aufgabe 2 (3):

Sei L eine Sprache, seien $\mathcal{M}_i$ L-Strukturen für $i \in I$, und sei $T := \bigcap_{i \in I} \mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)$ die Menge der L-Aussagen, die in all diesen L-Strukturen gelten. Seien außerdem $\phi_1(\underline{x})$ und $\phi_2(\underline{x})$ L-Formeln, die in allen $\mathcal{M}_i$ für die selben Tupel gelten, d. h. $\mathcal{M}_i \models \phi_1(\underline{a}) \iff \mathcal{M}_i \models \phi_2(\underline{a})$ für alle $i \in I$ und alle $\underline{a} \in M_i^n$.

Zeigen Sie:

Ist $\mathcal{M} \models T$ ein beliebiges Modell von T, so gelten $\phi_1(\underline{x})$ und $\phi_2(\underline{x})$ auch in $\mathcal{M}$ für die gleichen Tupel $\underline{a} \in M^n$.

Aufgabe 3 (3):

Zur Erinnerung: In der Vorlesung wurden Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ rekursiv definiert durch:

$$a + 0 = a, \qquad a + s(n) = s(a + n), \qquad a \cdot 0 = 0, \qquad a \cdot s(n) = a \cdot n + a.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2 \cdot n = n + n$.

In ihrem Beweis dürfen Sie nur die obigen Definitionen verwenden und die Tatsache, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $s(a) + b = s(a + b)$. All die anderen üblichen Eigenschaften von $+$ und $\cdot$ dürfen *nicht* verwendet werden.

(Setzen Sie in Ihrem Beweis genügend Klammern, um nicht aus Versehen Assoziativität von $+$ oder $\cdot$ zu verwenden.)

Aufgabe 4 (4):

Sei $M \subset s(\omega)$ eine Teilmenge, die ordnungsisomorph zu ω ist. Zu welchen der Ordinalzahlen $0, \dots, s(\omega)$ kann das Komplement $s(\omega) \setminus M$ ordnungsisomorph sein und zu welchen nicht? Begründen Sie.

Aufgabe 5 (3):

Zeigen Sie, dass für beliebige Kardinalzahlen κ_1, κ_2 und μ gilt: $(\kappa_1 \cdot \kappa_2)^\mu = \kappa_1^\mu \cdot \kappa_2^\mu$. Verwenden Sie dabei nur die Definitionen von Kardinalzahlprodukt und -exponentiation (und *nicht* Sätze darüber aus der Vorlesung).

Aufgabe 6 (2):

Zeigen Sie: Ist L eine Sprache und T eine Theorie, die unendliche Modelle besitzt, so besitzt T insbesondere auch Modelle, die nicht von der leeren Menge erzeugt werden. (Zur Erinnerung: Eine L-Struktur $\mathcal{M}$ ist von der leeren Menge erzeugt, wenn die kleinste Unterstruktur von $\mathcal{M}$ schon ganz $\mathcal{M}$ ist.)

Hinweis: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz oder den Satz von Löwenheim-Skolem.

Aufgabe 7 (3):

Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ L-Strukturen. Zeigen Sie, dass für jede endliche Teilmenge $T_0 \subset \mathrm{Th}_{L(N)}(\mathcal{N})$ gilt: $\mathcal{M}$ kann zu einem Modell von T_0 gemacht werden, indem man die Konstanten aus N, die in T_0 vorkommen, geeignet interpretiert.

Hinweis: Nehmen Sie die Konjunktion aller Aussagen aus T_0, ersetzen Sie darin die Konstanten aus N durch Variablen und fügen Sie Existenzquantoren für diese neuen Variablen ein. Was können Sie über die so erhaltene Aussage sagen?

Aufgabe 8 (4):

Sei $L = \{\sim\}$, wobei $\sim$ eine zweistelliges Relationssymbol ist, und sei T die L-Theorie, die besagt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, dass es unendlich viele Äquivalenzklassen gibt und dass jede Äquivalenzklasse aus genau zwei Elementen besteht.

Zeigen Sie, dass T Quantoren-Elimination hat.

Hinweis: Am einfachsten geht es mit dem Kriterium über Fortsetzungen Isomorphismen zwischen Unterstrukturen.