Aufgabe 1 (3):

Sei $L = L_{\text{oring}} \cup \{f\}$ (wie üblich ist $L_{\text{oring}} = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$), wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir fassen $\mathbb{R}$ als L-Struktur auf, indem wir $\mathbb{R}$ wie üblich als L_{ring}-Struktur ansehen und f durch eine Funktion $f^{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ interpretieren.

Geben Sie eine L-Aussage ϕ an, so dass gilt: $\mathbb{R} \models \phi$ genau dann, wenn $f^{\mathbb{R}}$ stetig ist. (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

Aufgabe 2 (4):

Sei L eine Sprache, die nur Relationssymbole enthält, T eine L-Theorie und $L' := L \cup \{P\}$, wobei P ein weiteres einstelliges Relationssymbol ist. Zeigen Sie, dass eine L'-Theorie T' existiert mit folgender Eigenschaft: Eine L'-Struktur $\mathcal{M}'$ ist ein Modell von T' genau dann, wenn die Teilmenge $\{a \in M' \mid \mathcal{M}' \models P(a)\}$, aufgefasst als L-Struktur, ein Modell von T ist.

(Geben Sie an, wie man T' aus T konstruieren kann; Sie können dabei etwas informell sein.)

Aufgabe 3 (3):

Sei α eine Ordninalzahl. Wir setzen die Ordnung von α auf die Menge $M_\alpha := \alpha \cup \{-1\}$ auf naheliegende Weise fort: $-1 < \beta$ für alle $\beta \in \alpha$.

Für welche Ordninalzahlen α ist M_α ordnungsisomorph zu α? Begründen Sie.

Aufgabe 4 (3):

Sei $(M, <)$ eine wohlgeordnete Menge. Wir nehmen an, dass auch die umgekehrte Ordnung (die definiert ist durch $a <' b :\iff b < a$ für $a, b \in M$) eine Wohlordnung ist. Zeigen Sie, dass M dann schon endlich ist.

Hinweis: Ein möglicher Ansatz besteht darin, unter der Annahme, dass M unendlich und wohlgeordnet ist, eine Teilmenge von M explizit anzugeben, die bezüglich $<'$ kein Minimum hat.

Aufgabe 5 (3):

Zeigen Sie, dass für beliebige Kardinalzahlen κ_1 und κ_2 gilt: Aus $\kappa_1 \le \kappa_2$ folgt $2^{\kappa_1} \le 2^{\kappa_2}$.

(Sie können 2^κ wahlweise definieren als die Kardinalität von $\operatorname{Abb}(\kappa, \{0, 1\})$ oder als die Kardinalität von $\mathcal{P}(\kappa)$.)

Aufgabe 6 (3):

Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als Struktur in der Sprache $L_{\text{agrp}} = \{0, +, -\}$. Zeigen Sie, dass eine elementare Erweiterung $Z \succ \mathbb{Z}$ existiert, in der außer -1 und 1 noch mindestens ein weiteres Element $a \in Z$ existiert, das kein echtes Vielfaches eines anderen Elements von Z ist; also genauer: Ist $b \in Z$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $nb = a$, so ist schon $n = 1$. (Wie üblich ist nb eine Kurzschreibweise für $\underbrace{b + \cdots + b}_{n \text{ mal}}$.)

Hinweis: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 7 (2):

Sei L eine Sprache ohne Konstantensymbole und sei T eine L-Theorie, die Quantoren-Elimination hat. Zeigen Sie, dass T dann schon vollständig ist.

Hinweis: Sie können ein Kriterium aus der Vorlesung verwenden, mit dem sich aus Quantoren-Elimination (manchmal) Vollständigkeit ableiten lässt. Oder Sie wenden Quantoren-Elimination direkt auf alle L-Aussagen an und schauen, was man auf diese Art zeigen kann.

Aufgabe 8 (4):

Sei $L = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist, und sei T die L-Theorie, die besagt, dass $f \circ f$ die Identität ist, dass unendlich viele x existieren mit $f(x) = x$ und dass unendlich viele x existieren mit $f(x) \neq x$.

Zeigen Sie, dass T Quantoren-Elimination hat.

Hinweis: Am einfachsten geht es mit dem Kriterium über Fortsetzungen von Isomorphismen zwischen Unterstrukturen.