Einführung in die Logik/Modelltheorie – Kurzskript

Inhaltsverzeichnis

1 Logik erster Stufe

1.1 Sprachen und Strukturen

Definition 1.1.1 *Eine **Sprache** (oder **Signatur**) L besteht aus folgendem:*

(a) *einer Menge, die man die **Konstantensymbole** von L nennt;*
(b) *einer Menge, die man die **Funktionssymbole** von L nennt;*
(c) *einer Menge, die man die **Relationssymbole** von L nennt;*
(d) *einer Funktion von der Menge der Funktionssymbole nach $\mathbb{N}_{\geq 1}$ und einer Funktion von der Menge der Relationssymbole nach $\mathbb{N}_{\geq 1}$; man nennt dies die **Stelligkeit** des entsprechenden Funktions-/Relationssymbols.*

Notation 1.1.2 *Üblicherweise schreibt man L als Vereinigung der drei Mengen.*

Beispiel 1.1.3
- *Die leere Sprache $L_\emptyset = \emptyset$ (ohne Konstanten-, Funktions- und Relationssymbole).*
- *Die Sprache der Gruppen in additive Schreibweise: $L_{\text{agrp}} = \{0, +, -\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol ist, $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol und $-$ ein einstelliges Funktionssymbol.*
- *Die Sprache der Gruppen in multiplikativer Schreibweise: $L_{\text{mgrp}} = \{1, \cdot, {}^{-1}\}$, wobei 1 ein Konstantensymbol ist, $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol und ${}^{-1}$ ein einstelliges Funktionssymbol.*
- *Die Sprache der Ringe: $L_{\text{ring}} = L_{\text{agrp}} \cup \{1, \cdot\}$, wobei 1 ein Konstantensymbol ist und $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol.*
- *Die Sprache der angeordneten Mengen: $L_{\text{ord}} = \{<\}$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol ist.*

Definition 1.1.4 *Sei L eine Sprache. Eine L-**Struktur** $\mathcal{M} = (M, \dots)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge M und:*
- *für jedes Konstantensymbol c aus L: ein Element $c^{\mathcal{M}}$;*
- *für jedes Funktionssymbol f aus L: eine Funktion $f^{\mathcal{M}}\colon M^\ell \to M$, wobei ℓ die Stelligkeit von f ist;*
- *für jedes Relationssymbol R aus L: eine Teilmenge $R^{\mathcal{M}} \subset M^\ell$, wobei ℓ die Stelligkeit von f ist.*

*Man nennt M die **Grundmenge** von $\mathcal{M}$ und $c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$ und $R^{\mathcal{M}}$ nennt man die **Interpretation** von c bzw. f bzw. R in $\mathcal{M}$.*

Beispiel 1.1.5 *Jede Menge ist eine $L_\emptyset$-Struktur. Jede (abelsche) Gruppe G kann als L_{agrp}-Struktur aufgefasst werden: $\mathcal{G} = (G, +^{\mathcal{G}}, -^{\mathcal{G}}, 0^{\mathcal{G}})$. (Aber: Nicht jede L_{agrp}-Struktur ist eine Gruppe.) Analog kann jeder Ring als L_{ring}-Struktur aufgefasst werden, etc.*

Notation 1.1.6 *Oft identifizieren wir eine Struktur $\mathcal{M}$ mit ihrer Grundmenge M. Außerdem schreiben wir für die Interpretationen der Symbole aus L statt $c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$ und $R^{\mathcal{M}}$ meist einfach nur c, f und R.*

Beispiel 1.1.7 *Sei K ein Körper und sei $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol ist, $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol, und $-$ und $r\cdot$ (für alle $r \in K$) einstellige Funktionssymbole. Dann kann jeder K-Vektorraum V eine $L_{K\text{-VR}}$-Struktur $\mathcal{V}$ aufgefasst werden, wobei $r\cdot^{\mathcal{V}}\colon V \to V$ die Skalarmultiplikation mit r ist.*

Notation 1.1.8 *Für Tupel verwenden wir die Notation $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Ist $\alpha\colon M \to N$ eine Abbildung und $\underline{a} \in M^n$, so schreiben wir $\alpha(\underline{a})$ für das Tupel $(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \in N^n$.*

Definition 1.1.9 *Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{M} = (M, \dots)$ und $\mathcal{N} = (N, \dots)$ L-Strukturen.*

(a) *Eine (L-)**Homomorphismus** von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$ ist eine Abbildung $\alpha\colon M \to N$, so dass gilt:*
   (i) *Für jedes Konstantensymbol $c \in L$ gilt: $\alpha(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$*
   (ii) *Für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in L$ und alle $\underline{a} \in M^n$ gilt: $\alpha(f^{\mathcal{M}}(\underline{a})) = f^{\mathcal{N}}(\alpha(\underline{a}))$*
   (iii) *Für jedes n-stellige Relationssymbol $R \in L$ und alle $\underline{a} \in M^n$ gilt: $\underline{a} \in R^{\mathcal{M}} \Rightarrow \alpha(\underline{a}) \in R^{\mathcal{N}}$*

(b) *Ist α injektiv und gilt in (c) sogar $\underline{a} \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \alpha(\underline{a}) \in R^{\mathcal{N}}$, so nennt man α eine (L-)**Einbettung** von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$.*

(c) *Eine bijektive Einbettung $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ nennt man auch (L-)**Isomorphismus** (und man nennt $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ **isomorph**, wenn ein solches α existiert).*

(d) *Ist $M \subset N$ und ist die Abbildung $M \to N, m \mapsto m$ Einbettung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$, so nennt man $\mathcal{M}$ auch eine **Unterstruktur** von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}$ eine **Oberstruktur** oder **Erweiterung** von $\mathcal{M}$. Notation dafür: $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.*

Beispiel 1.1.10 *Fasst man Gruppen als L_{mgrp}-Strukturen auf, so entspricht Definition 1.1.9 den üblichen Begriffen: Ein Gruppenhomomorphismus das selbe wie ein L_{mgrp}-Homomorphismus, ein Gruppenisomorphismus ist das selbe wie ein L_{mgrp}-Isomorphismus, und eine Untergruppe ist das selbe wie eine L_{mgrp}-Unterstruktur.*

Analoges gilt für Ringe oder Körper in der Sprache L_{ring} und für K-Vektorräume in der Sprache $L_{K\text{-VR}}$ aus Beispiel 1.1.7.

1.2 Formeln und Aussagen

Im folgenden sei L immer eine Sprache.

Definition 1.2.1 *Sei $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Tupel von Variablen.*

(a) *Ein „L-**Term** in $\underline{x}$“ ist wie folgt definiert:*
   (i) *Jede Variable x_i ist ein L-Term in $\underline{x}$.*
   (ii) *Ist $c \in L$ ein Konstantensymbol, so ist c auch ein L-Term in $\underline{x}$.*
   (iii) *Sind $t_1, \dots, t_\ell$ L-Terme in $\underline{x}$ und ist f ein ℓ-stelliges Funktionssymbol von L, so ist $f(t_1, \dots, t_\ell)$ ein L-Term in $\underline{x}$.*

(b) *Eine „L-**Formel** (erster Stufe) in $\underline{x}$“ ist wie folgt definiert:*
   (i) *Sind t_1 und t_2 L-Terme in $\underline{x}$, so ist $t_1 \doteq t_2$ eine L-Formel in $\underline{x}$.*
   (ii) *Sind $t_1, \dots, t_\ell$ L-Terme in $\underline{x}$ und ist R ein ℓ-stelliges Relationssymbol von L, so ist $R(t_1, \dots, t_\ell)$ eine L-Formel in $\underline{x}$.*
   (iii) *Ist ψ eine L-Formel in $\underline{x}$, so ist auch $\neg\psi$ eine L-Formel in $\underline{x}$.*
   (iv) *Sind ψ_1 und ψ_2 L-Formeln in $\underline{x}$, so ist auch $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ eine L-Formel in $\underline{x}$.*
   (v) *Ist ψ eine L-Formel in $x_1, \dots, x_{n+1}$, so ist $\exists x_{n+1}\colon \psi$ eine L-Formel in $x_1, \dots, x_n$.*

Genauer: Etwas ist ein L-Term bzw. eine L-Formel wenn es sich in endlich vielen *Schritten der Form (i)–(iii) bzw. (i)–(v) konstruieren lässt.*

(c) *Ist ϕ eine L-Formel in $\underline{x}$, so sagt man auch, $x_1, \dots, x_n$ sind die* ***freien Variablen*** *von ϕ.*

(d) *Eine Formel ohne freie Variablen (also im Fall $n = 0$) nennt man auch eine L-**Aussage** (erster Stufe).*

Notation 1.2.2 *Ist t ein L-Term in $\underline{x}$, so schreibt man oft auch $t(\underline{x})$ dafür; analog schreibt man $\phi(\underline{x})$, wenn ϕ eine L-Formel in $\underline{x}$ ist.*

Definition 1.2.3 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, $\underline{x}$ ein n-Tupel von Variablen und $\underline{a} \in M^n$.*

(a) *Ist $t(\underline{x})$ ein L-Term, so definiert man $t(\underline{a}) \in M$ wie folgt:*
   - (i) *Falls $t = x_i$:*
     $t(\underline{a}) = a_i$
   - (ii) *Falls $t = c$ (für ein Konstantensymbol $c \in L$):*
     $t(\underline{a}) = c^{\mathcal{M}}$
   - (iii) *Falls $t = f(t_1, \dots, t_\ell)$ (für ein ℓ-stelliges Funktionssymbol f):*
     $t(\underline{a}) = f^{\mathcal{M}}(t_1(\underline{a}), \dots, t_\ell(\underline{a}))$

(b) *Ist $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel, so definiert man folgendermaßen, ob $\phi(\underline{a})$* ***wahr*** *(in $\mathcal{M}$) ist; man sagt auch „$\phi(\underline{a})$* ***gilt*** *(in $\mathcal{M}$)“ oder „$\underline{a}$* ***erfüllt*** *ϕ“. Als Notation für $\phi(\underline{a})$* ***wahr*** *in $\mathcal{M}$ verwendet man „$\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$“.*
   - (i) *Falls $\phi(\underline{x}) = t_1(\underline{x}) \doteq t_2(\underline{x})$:*
     $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $t_1(\underline{a}) = t_2(\underline{a})$ ist.
   - (ii) *Falls $\phi(\underline{x}) = R(t_1(\underline{x}), \dots, t_\ell(\underline{x}))$:*
     $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $(t_1(\underline{a}), \dots, t_\ell(\underline{a})) \in R^{\mathcal{M}}$ ist.
   - (iii) *Falls $\phi(\underline{x}) = \neg\psi(\underline{x})$:*
     $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \not\models \psi(\underline{a})$ (d. h. wenn $\psi(\underline{a})$ nicht wahr in $\mathcal{M}$ ist).
   - (iv) *Falls $\phi(\underline{x}) = \psi_1(\underline{x}) \wedge \psi_2(\underline{x})$:*
     $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn sowohl $\mathcal{M} \models \psi_1(\underline{a})$ als auch $\mathcal{M} \models \psi_2(\underline{a})$.
   - (v) *Falls $\phi(\underline{x}) = \exists y\colon \psi(\underline{x}, y)$:*
     $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn es ein $b \in M$ gibt, so dass $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$.

(c) *Ist ϕ eine Aussage, so schreibt man „$\mathcal{M} \models \phi$“ falls ϕ wahr in $\mathcal{M}$ ist.*

Beispiel 1.2.4 *Ist ϕ die $\wedge$-Verknüpfung aller Gruppenaxiome, ausgedrückt in der Sprache L_{mgrp}, so gilt für L_{mgrp}-Strukturen $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ ist eine Gruppe genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \phi$.*

Analoges gilt für abelsche Gruppen, Ringe, Körper, angeordnete Mengen, etc.

Notation 1.2.5 *Bei Formeln verwenden wir oft abkürzende oder intuitive Notationen, z. B.:*
- *$\psi_1 \vee \psi_2$ bedeutet $\neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$*
- *$\forall y\colon \psi(\underline{x}, y)$ bedeutet $\neg\exists y\colon \neg\psi(\underline{x}, y)$*
- *$t_1 \not\doteq t_2$ bedeutet $\neg t_1 \doteq t_2$.*
- *$\exists y_1, y_2\colon \dots$ bedeutet $\exists y_1\colon \exists y_2\colon \dots$*
- *Funktionssymbole, die Verknüpfungen darstellen, werden „wie üblich“ geschrieben, also z. B. „$a + b$“ statt $+(a, b)$.*
- *Klammern werden nach Bedarf verwendet (z. B. $(a+b) \cdot c$ für $\cdot(+(a, b), c)$)*
- *$\phi \to \psi$ bedeutet $\neg\phi \vee \psi$.*
- *$\phi \leftrightarrow \psi$ bedeutet $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$*
- *$\top$ steht für eine Aussage, die immer wahr ist, z. B. für $\forall x\colon x = x$.*

- *$\bot$ steht für eine Aussage, die nie wahr ist, z. B. für $\neg\top$.*
- *Wenn eine Sprache 1 und $+$ enthält, schreiben wir 2 statt $1+1$, 3 statt $1+1+1$, etc.*
- *Wenn eine Sprache $\cdot$ enthält, schreiben wir x^2 statt $x \cdot x$, x^3 statt $x \cdot x \cdot x$, etc.*
- *Sind $\phi_1, \ldots, \phi_n$ L-Formeln, so setzen wir*

$$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i := \phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$$

und

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i := \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

(Im Fall $n = 0$ setzen wir $\bigvee_{i=1}^{0} \phi_i = \bot$ und $\bigwedge_{i=1}^{0} \phi_i = \top$.)

Lemma 1.2.6 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\phi(\underline{x}, y)$ eine L-Formel, so gibt es eine L-Formeln in $\underline{x}$, die folgendes ausdrücken:*

(a) *Es gibt mindestens n verschiedene y, so dass $\phi(\underline{x}, y)$ gilt.*
(b) *Es gibt höchstens n verschiedene y, so dass $\phi(\underline{x}, y)$ gilt.*
(c) *Es gibt genau n verschiedene y, so dass $\phi(\underline{x}, y)$ gilt.*

Notation 1.2.7 *Für die Formeln aus dem vorigen Lemma schreiben wir $\exists^{\geq n} y\colon \phi(\underline{x}, y)$, $\exists^{\leq n} y\colon \phi(\underline{x}, y)$ und $\exists^{= n} y\colon \phi(\underline{x}, y)$.*

1.3 Theorien

Definition 1.3.1 (a) *Eine L-**Theorie** ist eine (beliebige) Menge von L-Aussagen.*

(b) *Eine L-Struktur $\mathcal{M}$ nennt man **Modell** einer L-Theorie T, wenn für $\phi \in T$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi$. Notation dafür: $\mathcal{M} \models T$.*

Beispiel 1.3.2 *Es gibt eine L_{mgrp}-Theorie, deren Modelle genau die Gruppen sind; diese Theorie nennt man die „**Theorie der Gruppen**“. Analog definiert man die **Theorie der abelschen Gruppen**, **der Ringe**, **der Körper**, **der algebraisch abgeschlossenen Körper**, **der Vektorräume**, etc.*

Definition 1.3.3 (a) *Eine L-Theorie T heißt **konsistent**, wenn sie ein Modell besitzt (d. h. wenn es eine L-Struktur $\mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models T$); sonst heißt T **inkonsistent**.*

(b) *Zwei L-Theorien T_1 und T_2 heißen **äquivalent** (Notation: $T_1 \equiv T_2$), wenn sie die gleichen Modelle besitzen (d. h. wenn für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models T_1$ gdw. $\mathcal{M} \models T_2$).*

(c) *Eine L-Aussage ϕ **folgt** aus einer L-Theorie T (Notation dafür: $T \models \phi$), wenn ϕ in jedem Modell von T wahr ist (d. h. wenn für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models T$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi$).*

Lemma 1.3.4 *Für eine L-Theorie T sind äquivalent:*

(a) *T ist inkonsistent.*
(b) *Für alle L-Aussagen ϕ gilt $T \models \phi$.*
(c) *$T \models \bot$.*

(d) *Es gibt eine L-Aussage ϕ mit $T \models \phi$ und $T \models \neg\phi$.*

Definition 1.3.5 *Eine L-Theorie T heißt* ***vollständig****, wenn für jede L-Aussage ϕ entweder $T \models \phi$ oder $T \models \neg\phi$ gilt (aber nicht beides).*

Definition 1.3.6 *Ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, so ist die* ***Theorie von $\mathcal{M}$*** *die Menge aller L-Aussagen, die in $\mathcal{M}$ wahr sind:*

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) := \{\phi \text{ } L\text{-Aussage} \mid \mathcal{M} \models \phi\}.$$

Definition 1.3.7 *Zwei L-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ heißen* ***elementar äquivalent*** *(Notation dafür: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$), wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ gilt.*

Lemma 1.3.8 *Für eine L-Theorie T sind äquivalent:*
(a) *T ist vollständig.*
(b) *T ist konsistent, und alle Modelle von T sind elementar äquivalent.*
(c) *Es gibt eine L-Struktur $\mathcal{M}$, so dass T äquivalent zu $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ist.*

Definition 1.3.9 *Sei T eine L-Theorie. Zwei L-Formeln $\phi_1(\underline{x})$ und $\phi_2(\underline{x})$ heißen* ***äquivalent modulo*** *T, wenn gilt: $T \models \forall \underline{x}\colon (\phi_1(\underline{x}) \leftrightarrow \phi_2(\underline{x}))$. Im Fall $T = \emptyset$ sagt man einfach nur „$\phi_1(\underline{x})$ und $\phi_2(\underline{x})$ sind* ***äquivalent****“.*

2 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz

Wenn nicht anders angegeben sei im folgenden L immer eine (beliebige) Sprache.

Definition 2.0.1 *Eine L-Aussage ϕ heißt* ***Tautologie****, wenn sie in allen L-Strukturen gilt (d. h. wenn ϕ äquivalent zu $\top$ ist).*

2.1 Aussagenlogik

Definition 2.1.1 *Sei $\underline{P} = (P_1, \dots, P_m)$ ein Tupel von Variablen.*
(a) *Eine aussagenlogische Formel Φ in $\underline{P}$ ist wie folgt definiert:*
  (i) *$\top$ ist eine aussagenlogische Formel.*
  (ii) *Jedes P_i ist eine aussagenlogische Formel.*
  (iii) *Sind Ψ und Ψ' aussagenlogische Formeln, so sind auch $\neg\Psi$ und $\Psi \wedge \Psi'$ aussagenlogische Formeln.*
(b) *Ist Φ eine aussagenlogische Formel in $\underline{P}$ und sind $\phi_1(\underline{x}), \dots, \phi_m(\underline{x})$ L-Formeln, so bezeichnet $\Phi[\phi_1, \dots, \phi_m](\underline{x})$ die L-Formel, die man erhält, indem man in Φ jedes P_i durch ϕ_i ersetzt.*

Bemerkung 2.1.2 *Sind in Definition 2.1.1 (b) $\phi_1, \dots, \phi_m \in \{\top, \bot\}$, so ist $\Phi[\phi_1, \dots, \phi_m]$ äquivalent zu $\top$ oder zu $\bot$.*

Definition 2.1.3 *Eine* ***aussagenlogische Tautologie*** *ist eine aussagenlogische Formel Φ in $\underline{P} = (P_1, \dots, P_m)$ mit der folgenden Eigenschaft: Für beliebige $\phi_1, \dots, \phi_m \in \{\top, \bot\}$ ist $\Phi[\phi_1, \dots, \phi_m]$ äquivalent zu $\top$.*

Lemma 2.1.4 *Sei Φ eine aussagenlogische Tautologie in $\underline{P} = (P_1, \dots, P_m)$ und seien $\psi_1(\underline{x}), \dots, \psi_m(\underline{x})$ L-Formeln. Dann ist $\forall \underline{x}\colon \Phi[\psi_1, \dots, \psi_m]$ eine Tautologie.*

2.2 Der Hilbert-Kalkül

Lemma 2.2.1 *Die folgenden Aussagen („**Gleichheitsaxiome**") sind Tautologien:*
(g1) $\forall x \colon x \doteq x$
(g2) $\forall x, y \colon (x \doteq y \to y \doteq x)$
(g3) $\forall x, y, z \colon (x \doteq y \wedge y \doteq z \to x \doteq z)$
(g4) $\forall \underline{x}, \underline{y} \colon (\bigwedge_i x_i \doteq y_i \to (R(\underline{x}) \leftrightarrow R(\underline{y})))$
wobei $\underline{x}$ *und* $\underline{y}$ n*-Tupel sind und* R *ein* n*-stelliges Relationssymbol ist.*
(g5) $\forall \underline{x}, \underline{y} \colon (\bigwedge_i x_i \doteq y_i \to f(\underline{x}) \doteq f(\underline{y}))$
wobei $\underline{x}$ *und* $\underline{y}$ n*-Tupel sind und* f *ein* n*-stelliges Funktionssymbol ist.*

Lemma 2.2.2 *Die folgenden Aussagen („**Quantorenaxiome**") sind Tautologien; hierbei sind* ϕ *und* ψ L*-Formeln und* t *ein* L*-Term; für* $\underline{x}$ *ist auch das leere Tupel erlaubt.*
(q0) $\exists x \colon \top$
(q1) $\forall \underline{x} \colon \big(\forall y \colon (\phi(\underline{x}) \to \psi(\underline{x}, y)) \quad \leftrightarrow \quad (\phi(\underline{x}) \to \forall y \colon \psi(\underline{x}, y))\big)$
(q2) $\forall \underline{x} \colon (\forall y \colon \phi(\underline{x}, y) \to \phi(\underline{x}, t(\underline{x})))$

Lemma 2.2.3 (Modus Ponens) *Ist* T *eine* L*-Theorie und sind* $\phi(\underline{x})$, $\psi(\underline{x})$ L*-Aussagen mit* $T \models \forall \underline{x} \colon \phi(\underline{x})$ *und* $T \models \forall \underline{x} \colon (\phi(\underline{x}) \to \psi(\underline{x}))$*, so gilt* $T \models \forall \underline{x} \colon \psi(\underline{x})$*.*

Definition 2.2.4 *Sei* T *eine* L*-Theorie und* ϕ *eine* L*-Aussage. Ein **formaler Beweis** von* ϕ *aus* T *ist eine (endliche) Folge* $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ *von* L*-Aussagen mit* $\phi = \phi_n$*, so dass für jedes* $i \leq n$ *gilt:*
(a) ϕ_i *ist eine der Tautologien aus Lemma 2.1.4, 2.2.1 oder 2.2.2, oder*
(b) $\phi_i \in T$*, oder*
(c) *„*ϕ_i *folgt per modus ponens aus früheren Aussagen des Beweises", d. h. es gibt* $j, k < i$ *und Formeln* $\psi_1(\underline{x})$ *und* $\psi_2(\underline{x})$ *so dass gilt:* $\phi_j = \forall \underline{x} \colon \psi_1(\underline{x})$, $\phi_k = \forall \underline{x} \colon (\psi_1(\underline{x}) \to \psi_2(\underline{x}))$ *und* $\phi_i = \forall \underline{x} \colon \psi_2(\underline{x})$*.*

Wir schreiben $T \vdash_L \phi$ *wenn es einen formalen Beweis von* ϕ *aus* T *gibt.*

Bemerkung 2.2.5 *Es gibt viele verschiedene Definitionen von formalen Beweisen. Definition 2.2.4 ist eine Variante des **Hilbertkalküls**.*

2.3 Der Vollständigkeitssatz

Satz 2.3.1 (Gödelscher Vollständigkeitssatz) $T \vdash_L \phi \iff T \models \phi$*.*

Definition 2.3.2 *Wir nennen eine* L*-Theorie* T ***formal konsistent*** *wenn* $T \nvdash_L \bot$*.*

Lemma 2.3.3 *Ist* T *eine* L*-Theorie und* ϕ *eine* L*-Aussage, so gilt* $T \vdash_L \phi$ *genau dann, wenn* $T \cup \{\neg\phi\}$ *formal inkonsistent ist.*

Satz 2.3.4 (Gödelscher Vollständigkeitssatz, Version 2) *Eine Theorie* T *ist konsistent genau dann, wenn sie formal konsistent ist.*

Lemma 2.3.5 *Sei* T *eine* L*-Theorie, so dass jede endliche Teilmenge* $T_0 \subset T$ *formal konsistent ist. Dann ist auch* T *formal konsistent.*

Lemma 2.3.6 *Ist* T_i $(i \in I)$ *eine Kette von formal konsistenten* L*-Theorien, so ist auch die Vereinigung* $\bigcup_{i \in I} T_i$ *formal konsistent.*

Lemma 2.3.7 *Sei T eine L-Theorie, $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel ($x = (x_1, \ldots, x_n)$), $L' = L \cup C$, wobei C eine Menge von Konstanten ist und $c_1, \ldots, c_n \in C$. Dann gilt $T \vdash_{L'} \phi(\underline{c})$ genau dann wenn $T \vdash_L \forall \underline{x} \colon \phi(\underline{x})$. Insbesondere gilt für L-Aussagen: $T \vdash_{L'} \phi$ gdw $T \vdash_L \phi$.*

Definition 2.3.8 *Sei L eine Sprache und sei C die Menge der Konstantensymbole von L. Eine L-Theorie heißt **Henkin-Theorie**, wenn es für jede L-Formel $\phi(x)$ (in einer freien Variablen x) ein $c \in C$ gibt mit: $T \vdash_L (\exists x \colon \phi(x)) \to \phi(c)$.*

Lemma 2.3.9 *Zu jeder formal konsistenten L-Theorie T gibt es eine Sprache $L' = L \cup \{C\}$, wobei C eine Menge von Konstantensymbolen ist, und eine formal konsistente L'-Theorie T', die eine Henkin-Theorie ist und T enthält.*

Definition 2.3.10 *Eine L-Theorie T heißt **formal vollständig**, wenn für alle L-Aussagen ϕ entweder $T \vdash_L \phi$ oder $T \vdash_L \neg\phi$ gilt (aber nicht beides).*

Lemma 2.3.11 *Jede formal konsistente L-Theorie ist in einer formal vollständigen L-Theorie enthalten.*

Lemma 2.3.12 *Sei T eine L-Theorie und C die Menge der Konstanten von L. Dann wird durch*

$$c \sim c' \iff T \vdash c \doteq c'$$

eine Äquivalenzrelation auf C definiert. Außerdem gilt:

(a) *Ist R ein Relationssymbol von L und ist $c_i \sim c'_i$, so gilt $T \vdash R(\underline{c})$ gdw. $T \vdash R(\underline{c}')$.*

(b) *Ist R ein Funktionssymbol von L und ist $c_i \sim c'_i$, so gilt $T \vdash f(\underline{c}) \doteq f(\underline{c}')$.*

3 Mengenlehre

3.1 Die ZFC-Axiome

Definition 3.1.1 *Die **Sprache der Mengenlehre** ist $L_{\mathrm{Me}} := \{\dot\in\}$, wobei $\dot\in$ ein zweistelliges Relationssymbol ist. (Notation: $x \dot\notin y$ heißt $\neg x \in y$.)*

Notation 3.1.2 *Wir verwenden übliche abkürzende Notationen, z. B.:*

- *$x \dot\notin y$ heißt $\neg x \in y$*
- *$x \subset y$ heißt: $\forall z \colon (z \in x \to z \in y)$*
- *$\forall z \in x \colon \phi(z)$ heißt: $\forall z \colon (z \in x \to \phi(z))$*
- *$\exists z \in x \colon \phi(z)$ heißt: $\exists z \colon (z \in x \wedge \phi(z))$*

Definition 3.1.3 *Die **naive Mengenlehre** ist die L_{Me}-Theorie bestehend aus den folgenden beiden Axiomen (Extension und Komprehension).*

Axiom 3.1.4 (Extension) $\forall x, x' \colon (\forall z \colon (z \mathrel{\dot\in} x \leftrightarrow z \mathrel{\dot\in} x') \to x \doteq x')$

Bemerkung 3.1.5 *Ist $\mathcal{M}$ eine L_{Me}-Struktur, die das Extensionsaxiom erfüllt, so können wir Elemente von $\mathcal{M}$ mit den entsprechenden Teilmengen von $\mathcal{M}$ identifizieren. Die Elemente von $\mathcal{M}$ (bzw. die damit identifizierten Teilmengen von $\mathcal{M}$) nennen wir **Mengen**. Beliebige Teilmengen von $\mathcal{M}$ (die nicht notwendigerweise Elementen von $\mathcal{M}$ entsprechen) nennen wir **Klassen**.*

Axiom 3.1.6 (Komprehension) *Für jede L_{Me}-Formel $\phi(x)$:*
$\exists y\colon \forall z\colon (z \in y \leftrightarrow \phi(z))$

(Genauer gesagt handelt es sich bei der Komprehension um eine unendliche Menge von Axiomen.)

Satz 3.1.7 (Russelsches Paradox) *Die naive Mengenlehre ist (formal) inkonsistent.*

Definition 3.1.8 ZFC *(die **Theorie der Mengenlehre**) ist die L_{Me}-Theorie bestehend aus dem obigen Extensions-Axiom und allen folgenden Axiomen (Aussonderung, Potenzmenge, Ersetzung, Vereinigung, Auswahl, Unendlichkeit, Fundierung).*

Axiom 3.1.9 (Aussonderung) *Für jede L_{Me}-Formel $\phi(z, \underline{w})$:*
$\forall \underline{w}, x\colon \exists y\colon \forall z\colon (z \mathrel{\dot\in} y \leftrightarrow z \mathrel{\dot\in} x \wedge \phi(z, \underline{w}))$

Notation 3.1.10 *Die Menge y aus dem Aussonderungsaxiom ist nach dem Extensionsaxiom eindeutig; wir werden abkürzend $\{z \in x \mid \phi(z, \underline{w})\}$ dafür schreiben. Auch für andere Mengen, deren Existenz aus diesem oder den folgenden Axiomen folgt, verwenden wir die übliche Notation.*

Bemerkung 3.1.11 *Insbesondere existiert die Schnittmenge $x \cap x' = \{z \in x \mid z \in x'\}$, die Differenzmenge $x \setminus x' = \{z \in x \mid z \notin x'\}$, die leere Menge $\emptyset = \{z \in x \mid \bot\}$, und, für nicht-leere Mengen x, der Schnitt $\bigcap_{z \in x} z$.*

Axiom 3.1.12 (Potenzmenge) $\forall x\colon \exists y\colon \forall z\colon (z \mathrel{\dot\in} y \leftrightarrow z \subset x)$

Notation: $y = \mathcal{P}(x)$.

Axiom 3.1.13 (Ersetzung) *Für jede L_{Me}-Formel $\phi(u, z, \underline{w})$:*
$\forall \underline{w}, x\colon \big(\forall u \exists^{=1} z\colon \phi(u, z, \underline{w}) \quad \to \quad \exists y\colon \forall z\colon (z \mathrel{\dot\in} y \leftrightarrow \exists u\colon (u \mathrel{\dot\in} x \wedge \phi(u, z, \underline{w}))\big)$

Notation: $y = \bigcup_{u \in x} \{z \mid \phi(u, z, \underline{w})\}$.

Lemma 3.1.14 *(In* ZFC*:) Sind $x_1, \dots, x_n$ Mengen, so ist auch $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Menge.*

Axiom 3.1.15 (Vereinigung) $\forall x\colon \exists y\colon \forall z\colon (z \mathrel{\dot\in} y \leftrightarrow \exists w\colon (w \mathrel{\dot\in} x \wedge z \mathrel{\dot\in} w))$

Notation: $y = \bigcup_{z \in x} z$

Lemma 3.1.16 *(In* ZFC*:) Sind $x_1, \dots, x_n$ Mengen, so ist auch $x_1 \cup \dots \cup x_n$ eine Menge.*

Definition 3.1.17 *Wenn wir alle mathematischen Objekte als Mengen definieren wollen, definieren wir das Paar (z_1, z_2) als die Menge $\{\{z_1\}, \{z_1, z_2\}\}$.*

Lemma 3.1.18 *(In* ZFC*:) Mit der obigen Definition von Paar gilt:*
(a) *Sind z_1, z_2 Mengen, so ist auch (z_1, z_2) eine Menge.*
(b) *Für Mengen z_1, z_2, z_1', z_2' gilt: $(z_1, z_2) = (z_1', z_2')$ genau dann, wenn $z_1 = z_1'$ und $z_2 = z_2'$.*

(c) *Sind x_1, x_2 Mengen, so ist auch $x_1 \times x_2 := \{(z_1, z_2) \mid z_1 \in x_1, z_2 \in x_2\}$ eine Menge.*

Bemerkung 3.1.19 *Danach kann man viele weitere Objekte als Mengen definieren, z. B.:*

(a) $(z_1, \dots, z_n) := (z_1, (z_2, (\dots (z_{n-1}, z_n) \cdots)))$
$x_1 \times \cdots \times x_n = x_1 \times (x_2 \times (\dots (x_{n-1} \times x_n) \cdots))$

(b) *Eine n-stellige Relation auf einer Menge x ist eine Teilmenge von $x^n := \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$. Die Klasse aller n-stelligen Relationen auf einer Menge x ist selbst wieder eine Menge.*

(c) *Abbildungen werden wird mit ihrem Graph identifiziert, d. h. wir definieren eine Abbildung von x nach x' als eine Teilmenge $f \subset x \times x'$, so dass es für jedes $z \in x$ genau ein $z' \in x'$ gibt mit $(z, z') \in f$. Statt „$(z, z') \in f$“ verwenden wir dann aber die übliche Notation $f(z) = z'$.*
Die Klasse $\mathrm{Abb}(x, x')$ aller Abbildungen von x nach x' ist eine Menge.

(d) *Ein mit x indiziertes Tupel $(u_z)_{z \in x}$ von Elementen $u_z \in x'$ ist einfach eine Funktion von x nach x'.*
Ist $(u_z)_{z \in x}$ ein Tupel von Mengen u_z, so existieren auch die Mengen $\bigcup_{z \in x} u_z$, $\bigcap_{z \in x} u_z$ und

$$\bigtimes_{z \in x} u_z = \{f \in \mathrm{Abb}(x, \bigcup_{z \in x} u_z) \mid \forall z \in x \colon f(z) \in u_z\}$$

Axiom 3.1.20 (Auswahl) $\forall x \colon (\emptyset \mathrel{\dot{\notin}} x \to \bigtimes_{z \in x} z \neq \emptyset)$

Definition 3.1.21 *Wir definieren eine natürliche Zahl n als die Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$; also: $\underline{0} := \emptyset$, $\underline{1} := \{\underline{0}\} = \{\emptyset\}$, $\underline{2} := \{\underline{0}, \underline{1}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc. Außerdem setzen wir $s(x) := x \cup \{x\}$ (d. h. falls n eine natürliche Zahl ist, ist $s(\underline{n}) = \underline{n+1}$.*

Axiom 3.1.22 (Unendlichkeit) $\exists x \colon (\emptyset \mathrel{\dot{\in}} x \wedge \forall z \mathrel{\dot{\in}} x \colon z \cup \{z\} \mathrel{\dot{\in}} x)$

Bemerkung 3.1.23 *Diese Menge x ist unendlich. Genauer: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich in* ZFC *zeigen: x hat mindestens n verschiedene Elemente.*

Axiom 3.1.24 (Fundierung) $\forall x \colon (x \neq \emptyset \to \exists z \mathrel{\dot{\in}} x \colon z \cap x \doteq \emptyset)$

Lemma 3.1.25 *(In* ZFC*:) Es gibt keine Menge x mit $x \in x$; und es gibt keine Mengen x, y mit $x \in y$ und $y \in x$.*

3.2 Die natürlichen Zahlen

Von nun an arbeiten wir immer in ZFC. Wir lassen die Punkte über $=$ und $\in$ weg und schreiben $0, 1, \dots$ statt $\underline{0}$, $\underline{1}$, …

Lemma 3.2.1 *Sei $\phi(x) = 0 \in x \wedge \forall z \colon (z \in x \to s(z) \in x)$. Dann gilt: Es gibt genau ein ω mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *$\phi(\omega)$ gilt.*

(b) *Für echte Teilmengen $y \subsetneq \omega$ gilt $\phi(y)$ nicht.*

Definition 3.2.2 *Eine **natürliche Zahl** ist ein Element der Menge ω aus Lemma 3.2.1. (Die Menge der natürlichen Zahlen wird manchmal weiterhin mit ω bezeichnet statt mit $\mathbb{N}$.)*

Bemerkung 3.2.3 *Aus der Definition von ω folgt sofort, dass Induktionsbeweise über die natürlichen Zahlen funktionieren: Ist $x \subset \omega$ eine Teilmenge mit $0 \in x$ und $\forall z \in x\colon s(z) \in x$, so ist $x = \omega$.*

Satz 3.2.4 (Rekursionssatz) *(In* ZFC*:) Seien A und B Mengen und seien $g\colon A \to B$ und $h\colon A \times \omega \times B \to B$ Abbildungen. Dann existiert genau eine Abbildung $f\colon A \times \omega \to B$, so dass für alle $a \in A$ und alle $n \in \omega$ gilt:*
$f(a,0) = g(a)$ und $f(a,s(n)) = h(a,n,f(a,n))$.

Definition 3.2.5
(a) *Sei $+\colon \omega \times \omega \to \omega$ die (nach dem Rekursionssatz eindeutige) Abbildung mit:*
$a + 0 = a$ und $a + s(n) = s(a+n)$.
(b) *Wir definieren die Relation $\leq$ auf ω durch: $m \leq n$ genau dann, wenn es ein $m' \in \omega$ gibt mit $m + m' = n$.*
(c) *Sei $\cdot\colon \omega\times\omega \to \omega$ die (nach dem Rekursionssatz eindeutige) Abbildung mit:*
$a \cdot 0 = 0$ und $a \cdot s(n) = a \cdot n + a$.

Lemma 3.2.6 *$<$, $+$ und $\cdot$ erfüllen die üblichen Eigenschaften, z. B.:*
(a) *$+$ ist assoziativ und kommutativ;* 0 *ist ein neutrales Element bzgl. $+$*
(b) *$\cdot$ ist assoziativ und kommutativ;* 1 *ist ein neutrales Element bzgl. $+$*
(c) *$+$ und $\cdot$ erhalten die Ordnung:*
$\forall m, m', n \in \omega\colon (m < m' \leftrightarrow m + n < m' + n)$ und
$\forall m, m' \in \omega\colon \forall n \in \omega \setminus \{0\} : (m < m' \leftrightarrow m \cdot n < m' \cdot n)$.

Bemerkung 3.2.7 *Unter Verwendung unserer Definition von $s(n)$ kann man auch zeigen, dass für $n \in \omega$ gilt: $n = \{m \in \omega \mid m < n\}$.*

Definition 3.2.8 *Eine Menge x heißt **endlich**, wenn es ein $n \in \omega$ gibt und eine Bijektion $x \to \{m \in \omega \mid m < n\}$. Dieses n nennt man die **Kardinalität** von x; Notation dafür: $\#x$.*

Lemma 3.2.9 *Die folgenden Bedingungen an eine Menge x sind äquivalent:*
(a) *x ist endlich.*
(b) *Jede injektive Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(x,x)$ ist auch surjektiv.*
(c) *Jede surjektiv Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(x,x)$ ist auch injektive.*
(d) *Es gibt keine injektive Abbildung $\omega \to x$.*
(e) *Es gibt keine surjektive Abbildung $x \to \omega$*

Satz 3.2.10 (Rekursionssatz, Version 2) *(In* ZFC*:) Seien A und B Mengen und $h\colon A \times \mathcal{P}(A \times \omega \times B) \to B$ eine Abbildung. Dann existiert genau eine Abbildung $f\colon A \times \omega \to B$, so dass für alle $a \in A$ und alle $n \in \omega$ gilt:*
$f(a,n) = h(a, f|_{A\times n})$. (Hierbei fassen wir n als $\{m \in \omega \mid m < n\}$ auf und $f|_{A\times n}$ als Teilmenge von $A \times n \times B$.)

3.3 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und der ganze Rest

Definition 3.3.1
(a) *Wir setzen $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/{\sim}$, wobei $(m,n) \sim (m',n')$ genau dann, wenn $m + n' = m' + n$.*
(b) *Für $(m,n), (m',n') \in \mathbb{Z}$ setzen wir:*
$(m,n) + (m',n') := (m + m', n + n')$
$-(m,n) := (n,m)$
$(m,n) \cdot (m',n') := (mm' + nn', mn' + m'n)$
$(m,n) \leq (m',n')$ genau dann wenn $m + n' \leq m' + n$

(c) *Wir fassen* $\mathbb{N}$ *als Teilmenge von* $\mathbb{Z}$ *auf, indem wir* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $(n, 0) \in \mathbb{Z}$ *identifizieren.*

Bemerkung 3.3.2 *All dies ist wohldefiniert, und* $\mathbb{Z}$ *ist ein Ring mit den üblichen Eigenschaften. (Z. B.:* $\mathbb{Z}$ *ist angeordnet;* $\mathbb{Z}$ *ist ein Hauptidealring.)*

Definition 3.3.3 (a) *Wir definieren* $\mathbb{Q}$ *als den Quotientenkörper von* $\mathbb{Z}$*.*

(b) *Sind* $a, a' \in \mathbb{Z}$ *und* $b, b' \in \mathbb{N}$*, so setzen wir* $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'}$ *genau dann, wenn* $ab' \leq a'b$*.*

Definition 3.3.4 (a) *Sei* R *der Ring der Cauchyfolgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit Einträgen* $a_n \in \mathbb{Q}$*, und sei* $I \subset R$ *das Ideal bestehend aus den Folgen, die gegen* 0 *konvergieren. Wir setzen* $\mathbb{R} := R/I$*.*

(b) *Für* $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ *setzen wir* $a < b$*, wenn* $a + I \neq b + I$ *ist und für alle hinreichend großen* n *gilt:* $a_n < b_n$*.*

(c) *Wir fassen* $\mathbb{Q}$ *als Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *auf, indem wir jede rationale Zahl mit der entsprechenden konstanten Cauchyfolge identifizieren.*

In ähnlicher Weise kann man dann auch alle anderen üblichen mathematischen Objekte definieren; z. B. kann man Sprachen als Mengen auffassen, und für jede Sprache L lassen sich L-Formeln als Mengen auffassen. Hier eine Möglichkeit, L_{Me}-Formeln als Mengen zu kodieren:

Definition 3.3.5 *Der* ***Code*** $\ulcorner\phi(\underline{x})\urcorner$ *einer* L_{Me}*-Formel* $\phi(\underline{x})$ *ist wie folgt definiert:*

$\ulcorner x_i \doteq x_j\urcorner := (0, i, j)$

$\ulcorner x_i \dot{\in} x_j\urcorner := (1, i, j)$

$\ulcorner \neg\phi\urcorner := (2, \ulcorner\phi\urcorner, \emptyset)$

$\ulcorner \phi \wedge \psi\urcorner := (3, \ulcorner\phi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)$

$\ulcorner \forall x_i\colon \phi\urcorner := (4, i, \ulcorner\phi\urcorner)$

Ist ϕ eine L_{Me}-Aussage, so müssen wir, wenn wir in ZFC arbeiten, unterscheiden, ob wir ϕ als „inneres“ (durch eine Menge kodiertes) mathematisches Objekt auffassen (über das wir in der Sprache der Mengenlehre reden können) oder ob ϕ eine „äußere“ Aussage ist, die wir ggf. (aus ZFC) zeigen oder widerlegen wollen. Um diese Unterscheidung klarer zu machen, werden ich für äußere Aussagen und Formeln „$\mathbb{L}_{\mathbb{M}\mathrm{e}}$-Aussage“ und „$\mathbb{L}_{\mathbb{M}\mathrm{e}}$-Formel“ schreiben.

Bemerkung 3.3.6 *All die üblichen Operationen mit Formeln lassen sich in* ZFC *ausdrücken, insbesondere zum Beispiel folgendes; hierbei sei* L *immer eine beliebige Sprache.*

(a) *Die Klasse aller Codes von* L*-Formeln ist eine Menge.*

(b) *Die Abbildung, die einer* L*-Struktur* $\mathcal{M}$ *und einer* L*-Formel* $\phi(\underline{x})$ *in* n *Variablen die Menge* $\{\underline{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})\}$ *zuordnet, lässt sich durch eine* $\mathbb{L}_{\mathbb{M}\mathrm{e}}$*-Formel beschreiben.*

(c) *Für* L*-Theorien* T *und* L*-Strukturen* $\mathcal{M}$ *lässt sich „*$\mathcal{M} \models T$*“ durch eine* $\mathbb{L}_{\mathbb{M}\mathrm{e}}$*-Formel ausdrücken.*

(d) *Für* L*-Theorien* T *und* L*-Aussagen* ϕ *lassen sich „*$\mathcal{M} \models T$*“ und „*$\mathcal{M} \vdash T$*“ durch* $\mathbb{L}_{\mathbb{M}\mathrm{e}}$*-Formeln ausdrücken.*

(e) *Der gödelsche Vollständigkeitssatz lässt sich in* ZFC *beweisen: Für alle Sprachen* L*, für alle* L*-Theorien* T *und für alle* L*-Aussagen* ϕ *gilt:* $T \models \phi \iff T \vdash \phi$*.*

(f) *In* ZFC *lässt sich beweisen: Für alle* L*-Theorien* T *und alle* L_{Me}*-Aussagen* ϕ *und* ψ *gilt: Wenn* $T \models \phi$ *und* $T \models \phi \to \psi$*, dann* $T \models \psi$*.*
(g) *Die Menge der* ZFC*-Axiome lässt sich durch eine* $\mathbb{L}_{\mathrm{Me}}$*-Formel beschreiben.*
(h) *Die Abbildung* $\{L_{\mathrm{Me}}\text{-Fmln in } x\} \times \{L\text{-Fmln}\} \to \{L_{\mathrm{Me}}\text{-Aussagen}\}$, $(\phi(x), \psi(\underline{z})) \mapsto \phi(\ulcorner \psi(\underline{z}) \urcorner)$ *lässt sich durch eine* $\mathbb{L}_{\mathrm{Me}}$*-Formel beschreiben.*

3.4 Der erste gödelsche Unvollständigkeitssatz

Im Folgenden sei $T \supset \mathrm{ZFC}$ eine Theorie, die durch eine $\mathbb{L}_{\mathrm{Me}}$-Formel $\Phi(y)$ gegeben ist, d. h. $T = \{\psi\ L_{\mathrm{Me}}\text{-Aussage} \mid \Phi(\ulcorner \psi \urcorner)\}$. Wir nehmen außerdem an, dass für alle L_{Me}-Aussagen ψ gilt: Wenn $\psi \in T$, dann $T \models \Phi(\ulcorner \psi \urcorner)$; und wenn $\psi \notin T$ dann $T \models \neg\Phi(\ulcorner \psi \urcorner)$

Satz 3.4.1 (erster gödelscher Unvollständigkeitssatz) *Sei* T *wie oben. Dann ist* T *nicht vollständig.*

Lemma 3.4.2 *Sei* $\beta_T(x)$ *die* $\mathbb{L}_{\mathrm{Me}}$*-Formel, die ausdrückt, dass* x *der Code einer* L_{Me}*-Aussage ist, die aus der von* $\Phi(y)$ *definierten* L_{Me}*-Theorie folgt. Dann gilt für alle* L_{Me}*-Aussagen* ϕ*:* $T \vdash \phi \Rightarrow T \vdash \beta_T(\ulcorner \phi \urcorner)$

Lemma 3.4.3 *Es gibt eine* $\mathbb{L}_{\mathrm{Me}}$*-Formel* $\beta'_T(x)$*, so dass für jede* L_{Me}*-Aussage* ϕ *gilt:*
(a) *Falls* T *konsistent ist und* ϕ *eine* L_{Me}*-Aussage mit* $T \vdash \phi$ *ist, dann gilt* $T \vdash \beta'_T(\ulcorner \phi \urcorner)$*.*
(b) $\mathrm{ZFC} \vdash \forall \ulcorner \phi \urcorner\colon \neg(\beta'_T(\ulcorner \phi \urcorner) \wedge \beta'_T(\ulcorner \neg\phi \urcorner))$

3.5 Der zweite gödelsche Unvollständigkeitssatz

Seien T und $\Phi(y)$ weiterhin wie im vorigen Abschnitt.

Definition 3.5.1 *Sei* CON_T *die* L_{Me}*-Aussage, die ausdrückt, dass* T *(genauer: die durch* $\Phi(y)$ *definierte Theorie) konsistent ist.*

Satz 3.5.2 (zweiter gödelscher Unvollständigkeitssatz) *Sei* T *wie oben. Ist* T *konsistent, so gilt* $T \not\models \mathrm{CON}_T$*.*

Notation 3.5.3 *Ist* ϕ *eine* L_{Me}*-Aussage, so verwenden wir* $\Box\phi$ *als Kurzschreibweise für die* L_{Me}*-Aussage, die ausdrückt: „*$T \vdash \phi$*“ (also* $\Box\phi = \beta_T(\ulcorner \phi \urcorner)$*), für* $\beta_T(x)$ *wie in Lemma 3.4.2).*

Lemma 3.5.4 *Für alle* L_{Me}*-Aussagen* ϕ *und* ψ *gilt:*
(a) $T \vdash \phi \Rightarrow T \vdash \Box\phi$
(b) $T \vdash (\Box\phi \wedge \Box(\phi \to \psi)) \to \Box\psi)$
(c) $T \vdash \Box\phi \to \Box\Box\phi$

Lemma 3.5.5 *Für* L_{Me}*-Aussagen* ϕ*,* ϕ' *und* ψ *gilt außerdem:*
(d) $T \vdash \phi \to \psi \Rightarrow T \vdash \Box\phi \to \Box\psi$
(e) $T \vdash (\phi \wedge \phi') \to \psi \Rightarrow T \vdash (\Box\phi \wedge \Box\phi') \to \Box\psi$*.*

3.6 Ordinalzahlen

Definition 3.6.1 *Eine **Wohlordnung** auf einer Menge M ist eine Ordnungsrelation, so dass jede nicht-leere Teilmenge $A \subset M$ ein Minimum besitzt. Wir sagen auch, M ist (durch $<$) **wohlgeordnet**.*

Bemerkung 3.6.2 (transfinite Induktion) *Sei $(M, <)$ wohlgeordnet und sei A eine Teilmenge, mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in M$ gilt: Wenn alle $z < x$ in A liegen, dann liegt auch x in A.*

Unter diesen Bedingungen ist $A = M$.

Bemerkung 3.6.3 *Sei M wohlgeordnet (durch $<$).*
(a) *Jede Teilmenge von M ist (durch $<$) wohlgeordnet.*
(b) *Ist $a \in M$ nicht maximal, so besitzt a einen direkten Nachfolger.*

Definition 3.6.4 *Eine Menge α heißt **Ordinalzahl**, wenn gilt:*
(a) *Für alle $\beta \in \alpha$ ist $\beta \subset \alpha$.*
(b) *Für alle $\beta, \beta' \in \alpha$ gilt: $\beta \in \beta'$ oder $\beta' \in \beta$ oder $\beta = \beta'$.*
Wir schreiben On *für die Klasse aller Ordinalzahlen. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ definieren wir dass $\alpha < \beta$ ist, falls $\alpha \in \beta$ ist. Außerdem verwenden wir weiterhin $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$.*

Bemerkung 3.6.5 $\omega \subset \mathrm{On}$*; und auch* $\omega \in \mathrm{On}$.

Bem: (a) sagt also Transitivität: $\beta < \alpha \wedge \gamma < \beta \Rightarrow \gamma < \alpha$
Und (b) sagt, dass je zwei Elemente von α vergleichbar sind.

Lemma 3.6.6 *Sei $\alpha \in \mathrm{On}$. Dann gilt:*
(a) $s(\alpha) \in \mathrm{On}$.
(b) $\alpha \subset \mathrm{On}$
(c) $<$ *ist eine Wohlordnung auf* α

Definition 3.6.7 *Eine Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ nennt man **Nachfolger-Ordinalzahl**, wenn $\alpha = s(\beta)$ für ein $\beta \in \mathrm{On}$ ist; sonst nennt man α **Limes-Ordinalzahl**. (0 ist weder Nachfolger noch Limes.)*

Lemma 3.6.8 (a) On *ist keine Menge.*
(b) On *ist (mit $<$) eine „klassengroße Wohlordnung“ in folgendem Sinn: $<$ erfüllt die Axiome einer Ordnungsrelation, und für jede $\mathbb{L}_{\mathbb{M}\mathrm{e}}$-Formel $\phi(x, \underline{w})$ und jedes Tupel $\underline{b}$ von Mengen gilt: Ist die Klasse $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \phi(\alpha, \underline{b})\}$ nicht leer, so besitzt sie ein Minimum.*

Definition 3.6.9 *Sei $\phi(x, y, \underline{z})$ eine $\mathbb{L}_{\mathbb{M}\mathrm{e}}$-Formel und sei $\underline{w}$ ein Tupel von Mengen. Wir sagen, dass $\phi(x, y, \underline{w})$ ein **Funktional** F definiert, wenn es für jedes x höchstens ein y gibt mit, so dass $\phi(x, y, \underline{w})$ gilt. Wir nennen die Klasse $\{x \mid \exists y\colon \phi(x, y, \underline{w})\}$ den Definitionsbereich von F, und falls x im Definitionsbereich ist, schreiben $F(x)$ für das eindeutige y, so dass $\phi(x, y, \underline{w})$ gilt.*

Satz 3.6.10 (Rekursionssatz für Ordinalzahlen) *Sei H ein Funktional, das auf der Klasse aller Mengen definiert ist. Dann kann man ein Funktional F auf der Klasse der Ordinalzahlen angeben, so dass für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt:*
(a) *Die Einschränkung $F|_\alpha = \{(\beta, F(\beta)) \mid \beta \in \alpha\}$ ist eine Menge.*

(b) $F(\alpha) = H(F|_\alpha)$.

Satz 3.6.11 *Jede wohlgeordnete Menge ist zu genau einer Ordinalzahl ordnungs-isomorph. (Mit „ordnungs-isomorph“ ist gemeint: Es gibt eine ordnungserhaltende Bijektion.)*

Satz 3.6.12 (Wohlordnungssatz) *Jede Menge steht in Bijektion zu einer Ordinalzahl. Insbesondere gibt es auf jeder Menge eine Wohlordnung.*

Satz 3.6.13 (Zornsches Lemma) *Sei M eine nicht-leere Menge und $\prec$ eine partielle Ordnung auf M (d. h. $\prec$ ist transitiv, und für $a, a' \in M$ gilt höchstens eins von $a \prec a', a = a', a' \prec a$), so dass jede Kette eine obere Schranke in M besitzt. Dann gibt es ein maximales Element.*

3.7 Kardinalzahlen

Definition 3.7.1 *Die* ***Kardinalität*** *$|M|$ einer Menge M ist die kleinste Ordinalzahl α, so dass es eine Bijektion zwischen M und α gibt. Die Menge M heißt abzählbar, wenn $|M| = \omega$ ist. Eine* ***Kardinalzahl*** *ist eine Ordinalzahl α, für die $|\alpha| = \alpha$ gilt.*

Lemma 3.7.2 *Alle natürlichen Zahlen sind Kardinalzahlen; ω ist eine Kardinalzahl. Unendliche Nachfolger-Ordinalzahlen sind keine Kardinalzahlen.*

Satz 3.7.3 *Für Mengen M, M' gilt $|M| \leq |M'|$ genau dann, wenn eine Injektion $M \to M'$ existiert.*

Bemerkung 3.7.4 *Für Mengen M, M' gilt $|M| \leq |M'|$ genau dann, wenn eine Surjektion $M' \to M$ existiert.*

Definition 3.7.5 *Seien M, N disjunkte Mengen mit Kardinalitäten $|M| = \kappa$, $|N| = \mu$. Wir definieren:*
(a) $\kappa + \mu := |M \cup N|$
(b) $\kappa \cdot \mu := |M \times N|$
(c) $\kappa^\mu := |\operatorname{Abb}(N, M)|$

Satz 3.7.6 *Für jede Kardinalzahl κ gilt: $\kappa < 2^\kappa$.*

Definition 3.7.7 *Für $\alpha \in \mathrm{On}$ definieren wir rekursiv: $\aleph_\alpha$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl, die größer ist als $\aleph_\beta$ für alle $\beta < \alpha$.*

Bemerkung 3.7.8 *Für Limes-Ordinalzahlen λ gilt: $\aleph_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \aleph_\beta$.*

Satz 3.7.9 *Die* ***Kontinuumshypothese*** *„$2^{\aleph_0} = \aleph_1$“ lässt sich in ZFC weder beweisen noch widerlegen. Auch die* ***verallgemeinerte Kontinuumshypothese*** *„$\forall\alpha\colon 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{s(\alpha)}$“ lässt sich in ZFC weder beweisen noch widerlegen.*

Satz 3.7.10 *Für unendliche Kardinalzahlen κ, μ gilt: $\kappa+\mu = \kappa\cdot\mu = \max\{\kappa, \mu\}$.*

Lemma 3.7.11 *Ist $\alpha \in \mathrm{On}$ und sind $(M_\beta)_{\beta<\alpha}$ beliebige Mengen, so ist $|\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta| \leq \max\{\aleph_0, |\alpha|, \sup_{\beta<\alpha} |M_\beta|\}$.*

3.8 Universen

Definition 3.8.1 *Ein* ***Grothendieck-Universum*** *ist eine nicht-leere Menge U mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Ist $x \in U$ und $y \in x$, so ist auch $y \in U$.*
(b) *Ist $x \in U$, so ist auch $\mathcal{P}(x) \in U$.*
(c) *Ist $x \in U$ und $f\colon x \to U$ eine beliebige Funktion, so ist $\bigcup_{a \in x} f(a) \in U$.*

Beispiel 3.8.2 $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}^n(\emptyset)$ *ist ein Grothendieck-Universum.*

Lemma 3.8.3 *Ist U ist ein Grothendieck-Universum, so ist $\mathcal{U} := (U, \in)$ ein Modell von* ZFC $\setminus \{$*Unendlichkeit*$\}$. *Enthält U eine unendliche Menge, so ist $\mathcal{U}$ ein Modell von* ZFC.

Definition 3.8.4 *Eine Kardinalzahl κ heißt* ***stark unerreichbar****, wenn gilt:*

(a) $\kappa > \omega$.
(b) *Für alle Kardinalzahlen $\mu < \kappa$ gilt $2^\mu < \kappa$*
(c) *Jede Teilmenge $M \subset \kappa$ mit $\sup M = \kappa$ hat selbst schon Kardinalität κ. (Eine Menge $M \subset \kappa$ mit $\sup M = \kappa$ nennt man* ***kofinal*** *in κ.)*

Lemma 3.8.5 *Sei U ein Universum. Dann gilt:*

(a) *Für alle $x \in U$ ist $|x| < |U|$.*
(b) $c(U) := \sup_{x \in U} |x|$ *erfüllt die Bedingungen (b) und (c) aus Definition 3.8.4.*

Satz 3.8.6 *Für $\alpha \in \mathrm{On}$ definieren wir V_α rekursiv wie folgt: $V_0 := \emptyset$; $V_{s(\beta)} := V_\beta \cup \mathcal{P}(V_\beta)$; und für Limes-Ordinalzahlen λ: $V_\lambda := \bigcup_{\beta < \lambda} V_\beta$.*

Ist κ eine stark unerreichbare Kardinalzahl, so ist $(V_\kappa, \in)$ ein Universum.

4 Modelltheorie

4.1 Elementare Erweiterungen

Sei L eine Sprache. Sind im Folgenden $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$ Strukturen, so sind $M, N, \dots$ immer die zugehörigen Grundmengen.

Definition 4.1.1 *Ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und $A \subset M$, so setzt man $L(A) := L \cup A$, wobei die Elemente von A als (neue) Konstantensymbole aufgefasst werden, und $\mathcal{M}$ wird als $L(A)$-Struktur aufgefasst, indem jedes Konstantensymbol aus A als sich selbst interpretiert wird. (Formaler: $L(A) = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$ für Konstantensymbole c_a, und $c_a^{\mathcal{M}} = a$.)*

Bemerkung 4.1.2 *Jede $L(A)$-Formel lässt sich schreiben als $\phi(\underline{x}, \underline{b})$, wobei $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ eine L-Formel ist und $b_1, \dots, b_m \in A$ sind.*

Notation 4.1.3 *Wenn eine L-Struktur $\mathcal{M}$ auch als Struktur in einer anderen Sprache aufgefassen könnte, schreiben wir die Sprache manchmal als Index dazu:*

(a) $\mathrm{Th}_L(\mathcal{M})$ *ist die Theorie von $\mathcal{M}$ als L-Struktur.*
(b) $\mathcal{M} \equiv_L \mathcal{N}$ *bedeutet, dass $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ als L-Strukturen elementar äquivalent sind.*

Bemerkung 4.1.4 *Ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und $\mathcal{N}$ ein Modell von $\mathrm{Th}_{L(M)}(\mathcal{M})$, so haben wir eine natürliche Einbettung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, indem wir $m \in M$ abbilden auf die Interpretation der entsprechenden Konstante in $\mathcal{N}$. In einer solchen Situation wir fassen $\mathcal{M}$ meist als Unterstruktur von $\mathcal{N}$ auf.*

Definition 4.1.5 *Ist $\mathcal{M}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{N}$ mit $\mathcal{N} \equiv_{L(M)} \mathcal{M}$ (wie in Bemerkung 4.1.4), so nennt man $\mathcal{M}$ eine **elementare Unterstruktur** von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}$ eine **elementare Erweiterung** von $\mathcal{M}$. Notation dafür: $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ (oder $\mathcal{M} \prec_L \mathcal{N}$).*

*Ist $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine Einbettung von Strukturen, so nennen wir α eine **elementare Einbettung**, wenn $\mathcal{N} \equiv_{L(M)} \mathcal{M}$ gilt; hierbei werden die Konstanten $a \in M$ in N durch $\alpha(a)$ interpretiert.*

Satz 4.1.6 (Tarski-Test) *Eine Unterstruktur $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ ist genau dann eine elementare Unterstruktur, wenn für jede $L(M)$-Formel $\phi(x)$ gilt: Wenn ein $a \in N$ existiert mit $\mathcal{N} \models \phi(a)$, dann existiert schon ein $a' \in M$ mit $\mathcal{N} \models \phi(a')$.*

Lemma 4.1.7 *Sind $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{N}$ L-Strukturen mit $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ und $\mathcal{M}' \prec \mathcal{N}$, so gilt auch $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$.*

Satz 4.1.8 (Löwenheim-Skolem) *Sei $\mathcal{N}$ eine unendliche L-Struktur.*

(a) *Für jede Kardinalzahl $\kappa \geq \max\{|N|, |L|\}$ existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{N}' \succ \mathcal{N}$ mit $|N'| = \kappa$.*

(b) *Für jede Kardinalzahl κ mit $\max\{|L|, \aleph_0\} \leq \kappa \leq |N|$ existiert eine elementare Unterstruktur $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ mit $|M| = \kappa$.*

Korollar 4.1.9 *Wenn es ein Modell von* ZFC *gibt, dann gibt es auch ein abzählbares Modell von* ZFC.

Satz 4.1.10 (Kompaktheitssatz) *Ist T eine endlich konsistent L-Theorie (d. h. jede endliche Teilmenge von T ist konsistent), so ist T schon konsistent.*

Definition 4.1.11 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, sei $\underline{x}$ ein Tupel von Variablen, und sei Σ eine Menge von Formeln in $\underline{x}$. Σ heißt **endlich erfüllbar** (in $\mathcal{M}$), wenn für jede endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subset \Sigma$ ein $\underline{a} \in M^n$ existiert, so dass für alle $\phi(\underline{x}) \in \Sigma_0$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$. Existiert ein $\underline{a} \in M^n$, so dass $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ für alle $\phi(\underline{x}) \in \Sigma$ gilt, so sagt man $\underline{a}$ **realisiert** Σ (und Σ ist in $\mathcal{M}$ **erfüllbar** oder **realisiert**).*

Satz 4.1.12 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und Σ eine endlich erfüllbare Menge von Formeln. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$, in der Σ realisiert ist.*

4.2 Quantorenelimination

Sei weiterhin L eine Sprache.

Definition 4.2.1 (a) *Formeln der Form $R(t_1, \ldots, t_\ell)$ und $t_1 \doteq t_2$ (für L-Terme t_i und Relations-Symbole R) nennt man **atomar**.*

(b) *Eine **boolesche Kombination** von L-Formeln $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ist eine L-Formel der Form $\psi[\phi_1, \ldots, \phi_n]$, wobei $\psi(\underline{P})$ eine aussagenlogische Formel ist.*

(c) *Boolesche Kombinationen von atomaren Formeln nennt man **quantorenfrei**.*

Bemerkung 4.2.2 *Jede quantorenfreie Formel $\phi(\underline{x})$ ist äquivalent zu einer Formel der Form*

$$\bigwedge_{i=1}^{k_1} \phi_{i,1}(\underline{x}) \quad \vee \quad \ldots \quad \vee \quad \bigwedge_{i=1}^{k_\ell} \phi_{i,\ell}(\underline{x}),$$

wobei jedes $\phi_{i,\ell}(\underline{x})$ entweder eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel ist. (Dies nennt man die ***disjunktive Normalform*** *von $\phi(\underline{x})$.)*

Bemerkung 4.2.3 *Sei $\phi(\underline{x})$ eine quantorenfreie L-Formel, seien $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ L-Strukturen und sei $\underline{a} \in \mathcal{M}$. Dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{N} \models \phi(\underline{a})$.*

Definition 4.2.4 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei $A \subset M$. Die von A* ***erzeugte Unterstruktur*** *$\langle A \rangle_L$ von M ist die kleinste Unterstruktur von M, die A enthält: $\langle A \rangle_L = \{t^{\mathcal{M}}(\underline{a}) \mid t \text{ L-Term}, \underline{a} \in A^n\}$. Gilt $\langle A \rangle_L = M$, so sagt man, $\mathcal{M}$ ist von A* ***erzeugt****. Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt* ***endlich erzeugt****, wenn sie von einer endlichen Menge erzeugt ist.*

Lemma 4.2.5 *Sind $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ zwei von der leeren Menge erzeugte L-Strukturen, in denen die selben quantorenfreien L-Aussagen gelten, definiert $t^{\mathcal{M}_1} \mapsto t^{\mathcal{M}_2}$ (für L-Terme t) einen Isomorphismus $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$.*

Definition 4.2.6 *Eine Theorie T hat* ***Quantoren-Elimination*** *(oder „eliminiert Quantoren"), wenn jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ modulo T zu einer quantorenfreien L-Formel $\psi(\underline{x})$ äquivalent ist.*

Satz 4.2.7 *Sei T eine L-Theorie. Wenn jede Formel $\phi(\underline{x})$ der folgenden Form modulo T zu einer quantorenfreien L-Formel äquivalent ist, hat T Quantoren-Elimination:*

$$\phi(\underline{x}) = \exists y\colon \psi(\underline{x}, y),$$

wobei $\psi(\underline{x}, y)$ eine Konjunktion von atomaren und negierten atomaren Formeln ist.

Beispiel 4.2.8 *Sei L die leere Sprache. Die L-Theorie* INF $:= \{\exists^{\geq n} x\colon \top\}$ *eliminiert Quantoren.*

Beispiel 4.2.9 *Sei $L = \{<\}$ und sei* DLO *die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte, d. h.* DLO *besteht aus den folgenden L-Aussagen:*

(a) $<$ *ist eine Ordnungsrelation.*
(b) $\forall x, x'\colon (x < x' \to \exists y\colon x < y < x')$
(c) $\forall x\colon \exists y, y'\colon y < x < y'$.

DLO *eliminiert Quantoren.*

Satz 4.2.10 *Sei T eine konsistente L-Theorie mit Quantoren-Elinination. Wir nehmen außerdem an, dass es eine L-Struktur $\mathcal{A}$ gibt (nicht notwendigerweise ein Modell von T), die sich in jedes Modell von T einbetten lässt. Dann ist T vollständig.*

Satz 4.2.11 *Ist T eine L-Theorie mit Quantoren-Elimination, ist $\mathcal{M}$ ein Modell von T, und ist $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ eine Unterstruktur, die auch ein Modell von T ist, so ist $\mathcal{M}'$ schon eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{M}$.*

Satz 4.2.12 *Eine L-Theorie T hat Quantoren-Elimination genau dann, wenn folgendes gilt:*

Sind $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \models T$ Modelle, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine endlich erzeugte Unterstruktur, $\alpha\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}'$ eine Einbettung und ist $\phi(\underline{a}, y)$ eine quantorenfreie $L(A)$-Formel, so dass es ein $b \in \mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}, b)$, so gibt es auch ein $b' \in \mathcal{M}'$ mit $\mathcal{M}' \models \phi(\alpha(\underline{a}), b')$.

Lemma 4.2.13 *Seien T_1, T_2 L-Theorien. Wir nehmen an, dass sich jedes Paar von Modellen $\mathcal{M}_1 \models T_1, \mathcal{M}_2 \models T_2$ durch eine quantorenfreie L-Aussage $\phi_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$ „trennen“ lässt, d. h. $\mathcal{M}_1 \models \phi_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$ und $\mathcal{M}_2 \models \neg\phi_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$. Dann existiert auch eine quantorenfreie L-Aussage ϕ mit $T_1 \models \phi$ und $T_2 \models \neg\phi$.*

Korollar 4.2.14 *Eine L-Theorie T hat Quantoren-Elimination genau dann, wenn folgendes gilt:*

Sind $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \models T$ Modelle, ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine endlich erzeugte Unterstruktur, ist $\alpha\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}'$ eine Einbettung und ist $b \in \mathcal{M}$, so existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}'' \succ \mathcal{M}'$, so dass sich α zu einer Einbettung $\langle A, b\rangle_L \to \mathcal{M}''$ fortsetzen lässt.

Beispiel 4.2.15 *Sei K ein Körper, $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$ die Sprache der K-Vektorräume wie in Beispiel 1.1.7 und sei VR_K die $L_{K\text{-VR}}$-Theorie der K-Vektorräume. $\mathrm{VR}_K \cup \mathrm{INF}$ (für INF aus Beispiel 4.2.8) eliminiert Quantoren.*

4.3 Algebraisch abgeschlossene Körper

In diesem Abschnitt arbeiten wir in der Sprache $L_{\text{ring}} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.

Lemma 4.3.1 *Sei K ein unendlicher Körper. Dann existiert eine elementare Erweiterung $L \succ K$, die ein Element a enthält, das transzendent über K ist.*

Definition 4.3.2 *Sei ACF die L_{ring}-Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper und, für $p = 0$ oder p prim, ACF_p die L_{ring}-Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p.*

Satz 4.3.3 ACF *hat Quantoren-Elimination.*

Korollar 4.3.4 *Für $p = 0$ oder p prim ist ACF_p vollständig.*

Korollar 4.3.5 *Sind $K \subset L$ algebraisch abgeschlossene Körper, so ist L eine elementare Erweiterung von K.*

Korollar 4.3.6 *Für jede L_{ring}-Aussage ϕ sind äquivalent:*
(a) $\mathrm{ACF}_0 \models \phi$
(b) $\mathrm{ACF}_p \models \phi$ *für fast alle Primzahlen p.*
(c) $\mathrm{ACF}_p \models \phi$ *für unendlich viele Primzahlen p.*

Satz 4.3.7 *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $f\colon K^n \to K^n$ eine polynomiale Abbildung, d. h. $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x}))$ für Polynome $f_1, \dots, f_n \in K[\underline{x}]$. Ist f injektiv, so ist f auch surjektiv.*

Satz 4.3.8 (Hilberts Nullstellensatz) *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $I \subsetneq K[\underline{x}]$ ein echtes Ideal. Dann existiert ein $\underline{a} \in K^n$, so dass für alle $f \in I$ gilt: $f(\underline{a}) = 0$.*

Korollar 4.3.9 *Ist K algebraisch abgeschlossen, so sind die maximalen Ideale von $K[\underline{x}]$ genau die Ideale der Form $I_{\underline{a}} = \{f \in K[\underline{x}] \mid f(\underline{a}) = 0\}$ für $\underline{a} \in K^n$.*

4.4 Reell abgeschlossene Körper

In diesem Abschnitt arbeiten wir in der Sprache $L_{\text{oring}} := L_{\text{ring}} \cup \{<\}$ der angeordneten Ringe. Alle Ringe sind kommutativ und mit 1.

Definition 4.4.1 *Ein* ***angeordneter Ring*** *ist ein Ring R mit einer Ordnungsrelation $<$, so dass für alle $a, b, c \in R$ gilt:*
(a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
(b) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$.
Ein ***angeordneter Körper*** *ist ein Körper, der ein angeordneter Ring ist.*

Ein angeordneter Körper heißt ***reell abgeschlossen****, wenn er keine echte angeordnete algebraische Erweiterung besitzt.*

Ist K ein angeordneter Körper und $L \supset K$ eine reell abgeschlossene algebraische Erweiterung von K, so dass die Ordnung von L diejenige von K fortsetzt, son nennt man L einen ***reellen Abschluss*** *von K.*

Bemerkung 4.4.2 *In angeordneten Ringen R gilt für alle $a, b \in R$:*
(a) $a > 0$ *genau dann, wenn* $-a < 0$.
(b) $a^2 \geq 0$. *(Insbesondere* $1 > 0$.*)*
(c) $ab > 0$ *genau dann, wenn a und b beide positiv oder beide negativ sind.*

Satz 4.4.3 *Für andgeordnete Körper K ist äquivalent:*
(a) *K ist reell abgeschlossen.*
(b) *Jedes positive Element von K ist ein Quadrat und jede Polynom $f \in K[x]$ von ungeradem Grad hat eine Nullstelle in K.*
(c) *$K(i)$ ist algebraisch abgeschlossen (wobei $i = \sqrt{-1}$).*
Insbesondere ist die Ordnungsrelation auf einem reell abgeschlossenen Körper schon allein durch die Körperstruktur festgelegt.

Definition 4.4.4 *Sei* RCF *die L_{oring}-Theorie der reell abgeschlossenen Körper.*

Lemma 4.4.5 *Sei K ein Körper und $P \subset K$ eine Teilmenge mit $1 \in P$, $P \cdot P \subset P$ und so dass keine $a_i \in P$ und $b_i \in K$ existieren mit $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 = -1$. Dann lässt sich K so anordnen, dass alle Elemente von P nicht-negativ sind.*

Lemma 4.4.6 *Sei K reell abgeschlossen, sei $f \in K[x]$ ein Polynom, seien $a_1 < \cdots < a_n$ die Nullstellen von f und sei $a_0 := -\infty$ und $a_{n+1} := +\infty$. Dann at $f(x)$ auf jedem Intervall (a_i, a_{i+1}) konstantes Vorzeichen (für $0 \leq i \leq n$), und auf benachbarten Intervallen ist das Vorzeichen verschieden.*

Lemma 4.4.7 *Ist R ein angeordneter Ring, so lässt sich die Ordnung auf eindeutige Weise auf den Quotientenkörper* $\operatorname{Quot}(R)$ *fortsetzen.*

Satz 4.4.8 *Jeder angeordnete Körper K besitzt bis auf eindeutigen Isomorphismus genau einen reellen Abschluss. („Bis auf eindeutigen Isomorphismus genau einen" bedeutet: Sind L_1, L_2 zwei reelle Abschlüsse von K, so existiert genau ein ordnungserhaltender Körperisomorphismus $L_1 \to L_2$, der auf K die Identität ist.)*

Lemma 4.4.9 *Ist K ein angeordneter Körper, sind L_1, L_2 reelle Abschlüsse von K und ist $f \in K[X]$ ein Polynom, so besitzt f gleich viele Nullstellen in L_1 und in L_2.*

Satz 4.4.10 RCF *hat Quantoren-Elimination.*

Korollar 4.4.11 RCF *ist vollständig.*

Satz 4.4.12 (Hilbert 17) *Sei K ein reell abgeschlossener Körper (z. B. $K = \mathbb{R}$). Jedes Polynom $f \in K[\underline{x}]$, das auf K keine negativen Werte annimmt, ist Summe von Quadraten von rationalen Funktionen $g_i \in K(\underline{x})$.*

Index