Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Wintersemester 2018/19

Probeklausur Einführung in die Logik/Modelltheorie

Diese Probeklausur sollte vom Umfang und von der Art der Aufgaben etwa den eigentlichen Klausuren entsprechen; garantieren kann ich dafür natürlich nicht. (Die Aufgaben decken auch nicht unbedingt alle Bereiche ab; sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.)

Aufgabe 1:

Wir setzen $L = \{<\}$ und fassen $\mathbb{Z}$ als L-Struktur auf. Geben Sie eine L-Formel $\phi(x, y)$ an, so dass $\mathbb{Z} \models \phi(a, b)$ (für $a, b \in \mathbb{Z}$) gilt genau dann wenn $b = a + 2$. In der Formel sollen keinerlei Abkürzungen verwendet werden (also nur $=$, $<$, $\wedge$, $\neg$, $\exists$ und Variablen). (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

Aufgabe 2:

Sei L eine Sprache und seien T_1 und T_2 L-Theorien. Geben Sie eine L-Theorie T an, so dass für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M}$ ist ein Modell von T genau dann, wenn $\mathcal{M}$ ein Modell von T_1 oder von T_2 ist.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie: Ist n eine natürliche Zahl, $x_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$ und $f \in \mathrm{Abb}(x_n, x_n)$ eine injektive Abbildung, so ist f auch surjektiv.

(Die verschiedenen äquivalenten Charakterisierungen von endlichen Mengen aus der Vorlesung dürfen Sie *nicht* verwenden.)

Hinweis: Verwenden Sie Induktion: Können Sie aus einer Injektion $x_{s(n)} \to x_{s(n)}$ eine Injektion $x_n \to x_n$ konstruieren?

Aufgabe 4:

Sei α eine Ordinalzahl und sei $f\colon \alpha \to \alpha$ eine Funktion, so dass für alle $\beta \in \alpha \setminus \{0\}$ gilt: $f(\beta) < \beta$. Zeigen Sie: Für jedes $\beta \in \alpha$ existiert eine natürliche Zahl n, so dass $f^n(\beta) = 0$ ist. (f^n sei die n-fache Verknüpfung von f mit sich selbst.)

Hinweis: Was ließe sich über ein minimales Gegenbeispiel sagen?

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass für beliebige Kardinalzahlen κ, μ_1 und μ_2 gilt: $\kappa^{\mu_1} \cdot \kappa^{\mu_2} = \kappa^{\mu_1 + \mu_2}$. Verwenden Sie dabei nur die Definitionen von Kardinalzahlprodukt und -exponentiation (und *nicht* Sätze darüber aus der Vorlesung).

Aufgabe 6:

Wir arbeiten in der Sprache $L_{\mathrm{mgrp}} = \{1, \cdot, {}^{-1}\}$ der Gruppen. Zeigen Sie, dass es keine L_{mgrp}-Formel $\phi(x)$ gibt, die in Gruppen genau für die Elemente endlicher Ordnung gilt (also so, dass für Gruppen G und $a \in G$ gilt: $G \models \phi(a)$ genau dann, wenn ein $n > 0$ existiert mit $a^n = 1$).

Hinweis: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 7:

Wir betrachten $\mathbb{Q}$ in der Sprache $L_{\mathrm{oring}} = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$. Zeigen Sie, dass es einen Körper Q gibt, der abzählbar ist und elementar äquivalent zu $\mathbb{Q}$, aber nicht isomorph zu $\mathbb{Q}$.

Hinweis: Wenn in Q ein Element existiert, das größer als jede rationale Zahl ist, kann Q nicht isomorph zu $\mathbb{Q}$ sein.

Aufgabe 8:

Sei L eine Sprache, die nur aus Konstantensymbolen besteht. Zeigen Sie: Ist T eine konsistente L-Theorie, mit der Eigenschaft, dass jedes Modell von T unendlich ist, so hat T Quantoren-Elimination.