....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 1

Abgabe am 15.10.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf diesem Übungsblatt werden die Definitionen 6.1.1 („stark κ-homogen“) und 6.1.6 („$\mathrm{cf}(\alpha)$“) aus dem Skript schon verwendet.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien $A \subset B \subset M$. Eine „Fortsetzung auf B“ eines Types $p \in S_1(A)$ ist ein Typ $q \in S_1(B)$ mit $q \supset p$.

Zeigen Sie:

(a) Jeder Typ $p \in S_1(A)$ besitzt mindestens eine Fortsetzung auf B.

(b) $B \subset \mathrm{dcl}(A)$ gilt genau dann, wenn jeder Typ $p \in S_1(A)$ genau eine Fortsetzung auf B besitzt.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte):

(a) Sei $\mathcal{M}$ saturiert, d. h. κ-saturiert für $\kappa = |\mathcal{M}|$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ dann stark κ-homogen ist.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.4.6.

(b) Sei $\mathcal{M}$ streng minimal (Def. 5.5.1) mit $|\mathcal{M}| > |T|$ (für $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$). Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ saturiert ist.
Hinweis/Erinnerung: Über jeder Menge $A \subset M$ gibt es nur einen nicht-algebraischen Typ. Um zu zeigen, dass der realisiert ist, ist es nützlich, die Kardinalität von $\mathrm{acl}(A)$ zu bestimmen. (Die algebraischen Typen sind noch einfacher zu behandeln. . .)

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, sei $\mathcal{M}$ κ-saturiert und stark κ-homogen, sei $A \subset M$ mit $|A| < \kappa$, und sei $b \in M$. Zeigen Sie: $b \in \mathrm{dcl}(A)$ genau dann, wenn b von $\mathrm{Aut}_A(\mathcal{M})$ fixiert wird, d. h. wenn für alle $\alpha \in \mathrm{Aut}_A(\mathcal{M})$ gilt: $\alpha(b) = b$.
Hinweis: Ist $b \notin \mathrm{dcl}(A)$, so existiert ein anderes $b' \in M$, das den selben Typ über A hat wie b.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, dass zeigt, dass die Äquivalenz aus Teil (a) ist falsch wenn $\mathcal{M}$ nicht stark κ-homogen ist. (Welche Richtung der Äquivalenz ist dann falsch?)

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Für beliebige Limes-Ordinalzahlen α gilt $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$ (d. h. die Kardinalzahl $\mathrm{cf}(\alpha)$ regulär).

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Mod_W19/