1	2	3	4	5	Σ

....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 10

Abgabe am 17.12.2019 in der Vorlesung

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $C \subset M$ klein und ist $(\underline{b}_i)_{i\in I}$ eine über C ununterscheidbare Folge, so ist $(\underline{b}_i)_{i\in I}$ sogar über $\operatorname{acl}(C)$ ununterscheidbar.

Eine mögliche Vorgehensweise: Halten Sie eine Formel $\phi(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k, \underline{d})$ fest, mit $\underline{d} \in \operatorname{acl}(C)^\ell$. Betrachten Sie die (endliche) Bahn D von $\underline{d}$ unter $\operatorname{Aut}_C(\mathcal{M})$. Jedes Tupel von Indizes $i_1 < \dots < i_k$ liefert eine Teilmenge von D, nämlich $\{\underline{d}' \in D \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{b}_{i_1}, \dots, \underline{b}_{i_k}, \underline{d}')\}$. Zeigen Sie, dass mindestens eine Teilmenge $D_0 \subset D$ auf diese Art für beliebig große i_1 erhalten werden kann, und benutzen Sie dann die Ununterscheidbarkeit, um zu zeigen, dass man immer D_0 erhält.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei $\delta(\underline{x}; \underline{y})$ eine stabile Formel, sei $C \subset M$ klein, und seien $\underline{b}, \underline{b}' \in M^m$ mit $\operatorname{tp}(\underline{b}/C) = \operatorname{tp}(\underline{b}'/C)$. Korrektur: Es hätte heißen sollen: $\operatorname{tp}(\underline{b}/\operatorname{acl}(C)) = \operatorname{tp}(\underline{b}'/\operatorname{acl}(C))$) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) $\delta(\underline{x}; \underline{b})$ ist generisch über C.

(b) $\delta(\underline{x}; \underline{b}) \wedge \delta(\underline{x}; \underline{b}')$ ist generisch über C.

(c) $\delta(\underline{x}; \underline{b}) \vee \delta(\underline{x}; \underline{b}')$ ist generisch über C.

Hinweis zu „(c) $\Rightarrow$ (a)“: Verwenden Sie eine geeignete nach Satz 6.8.2 äquivalente Bedingung.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei $\phi(\underline{x})$ eine $L(C)$-Formel. Dann sind äquivalent:

(a) $\delta(\underline{x}; \underline{b})$ ist generisch über C.

(b) $\delta(\underline{x}; \underline{b}) \wedge \phi(\underline{x})$ oder $\delta(\underline{x}; \underline{b}) \wedge \neg\phi(\underline{x})$ ist generisch über C.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell einer stabilen Theorie und sei $C \subset M$ klein, und sei $\underline{x}$ ein festes Tupel von Variablen. Wir fassen die Menge aller $L(M)$-Formeln in $\underline{x}$ als Ring auf, mit der symmetrischen Differenz als Addition und der Konjunktion als Multiplikation. Zeigen Sie:

(a) Eine Menge Δ von $L(M)$-Formeln in $\underline{x}$ ist ein Ideal genau dann, wenn [Korrektur: „sie nicht leer ist und“] für alle $L(M)$-Formeln ϕ, ψ gilt:
  (i) Ist $\psi(\mathcal{M}) \subset \phi(\mathcal{M})$ und ist ϕ in Δ, so ist auch ψ in Δ.
  (ii) Sind ϕ und ψ in Δ, so auch $\phi \vee \psi$.

(b) Die Menge der über C generischen Formeln bildet ein Ideal.
Korrektur: Es hätte heißen sollen: Die Menge der über C *nicht*-generischen Formeln bildet ein Ideal..)
Hinweis: Verwenden Sie (vor allem für (ii)) ein geeignetes Kriterium aus Satz 6.8.2.

Aufgabe 5 (2+1+1 Punkte):

Wir wollen Bemerkung 6.8.4 zeigen:

(a) Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell, sei $C = \operatorname{acl}(C) \subset M$ klein, sei $\delta(\underline{x}; \underline{y})$ eine stabile Formel und sei $\underline{b} \in M^m$. Zeigen Sie: $\delta(\underline{x}; \underline{b})$ ist nicht generisch über C genau dann, wenn $\delta(\underline{x}; \underline{y})$ über C teilt.
Hinweis zu „$\Rightarrow$“: Benutzen Sie Satz 6.8.2, um eine geeignete ununterscheidbare Folge $(\underline{b}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zu wählen. Nutzen Sie die Ununterscheidbarkeit, um die Existenz vom k aus Definition 6.8.3 zu zeigen.

(b) Zeigen Sie, dass (a) auch dann wahr ist, wenn man die Annahme $C = \operatorname{acl}(C)$ weglässt.
Hinweis zu „$\Leftarrow$“: Sie können mit einem Satz aus der Vorlesung zunächst eine über $\operatorname{acl}(C)$ ununterscheidbare Folge konstruieren, die die Bedingungen aus Definition 6.8.3 erfüllt. Danach kann man mit einem Automorphismus noch $\operatorname{tp}(\underline{b}_i/\operatorname{acl}(C)) = \operatorname{tp}(\underline{b}/\operatorname{acl}(C))$ erreichen.

(c) Zeigen Sie: $\delta(\underline{x}; \underline{b})$ gabelt über C genau dann, wenn $\delta(\underline{x}; \underline{b})$ über C teilt.
Hinweis: Das folgt aus einer anderen Übungsaufgabe auf diesem Blatt.